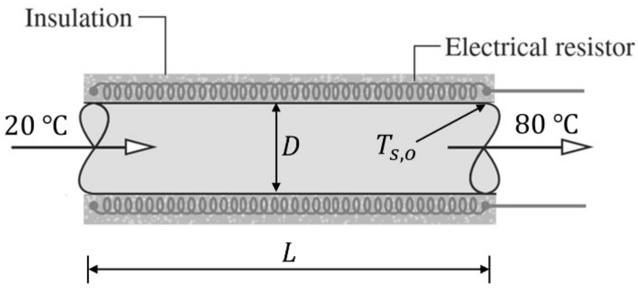
Tampereen yliopisto
YEB.421 LÄMMÖNSIIRTO
Välikoe 2, 3.5.2024, ratkaisut

1. Putkessa virtaa vettä 1 kg/s. Sähkövastuksen avulla putken seinämässä kehittyy tasaisesti lämpöä 20 kW/m. Putki on ulkopuolelta eristetty, joten kaikki kehittyvä lämpö siirtyy putkessa virtaavaan veteen. Putken sisähalkaisija $D = 30$ mm. Veden keskilämpötila halutaan nostaa arvosta 20 °C arvoon 80 °C.




(a) Määritä tarvittava putken pituus ($= L$).

(b) Määritä putken sisäpinnan lämpötila putken lopussa ($= T_{s,o}$).

Vedelle $\rho = 1000$ kg/m³; $k = 0.65$ W/m K; $\mu = 0.001$ Pa s; $c_p = 4180$ J/(kg K).

Tarvittava putken pituus saadaan energiataseen perusteella:

$$\dot{Q}'L = \dot{m}c_p(T_{m,o} - T_{m,i})$$

$$\rightarrow L = \frac{\dot{m}c_p(T_{m,o} - T_{m,i})}{\dot{Q}'} = \frac{1 \cdot 4180 \cdot (80 - 20)}{20000} = 12.54 \text{ m}$$

Määritetään ensin lämmönsiirtokerroin:

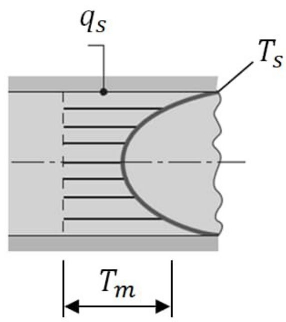
$$\dot{m} = \rho A V = \rho \frac{\pi D^2}{4} V \;\rightarrow\; V = \frac{4\dot{m}}{\rho \pi D^2} = \frac{4 \cdot 1}{1000 \cdot \pi \cdot (0.03)^2} = 1.415 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 1.415 \cdot 0.03}{0.001} = 42450 \text{ (Turb. virtaus)} \qquad \left(\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{0.001 \cdot 4180}{0.65} = 6.43\right)$$

$$\rightarrow \text{Nu} = \frac{hD}{k} = 0.023\,\text{Re}^{0.8}\,\text{Pr}^{1/3} = 0.023 \cdot (42450)^{0.8} \cdot (6.43)^{1/3} = 215.5$$

$$\rightarrow h = \frac{\text{Nu}\,k}{D} = \frac{215.5 \cdot 0.65}{0.03} = 4669 \text{ W/(m}^2\text{ K)}$$

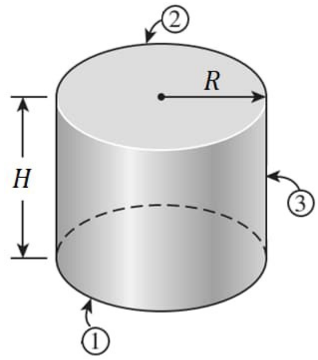
Putken pintalämpötila, $T_s$, saadaan seuraavasti:




$$q_s = \frac{\dot{Q}'}{\pi D} = h(T_s - T_m)$$

$$\rightarrow T_s = \frac{\dot{Q}'}{\pi D h} + T_m = \frac{20000}{\pi \cdot 0.03 \cdot 4669} + 80 = 125.5 \text{ °C}$$

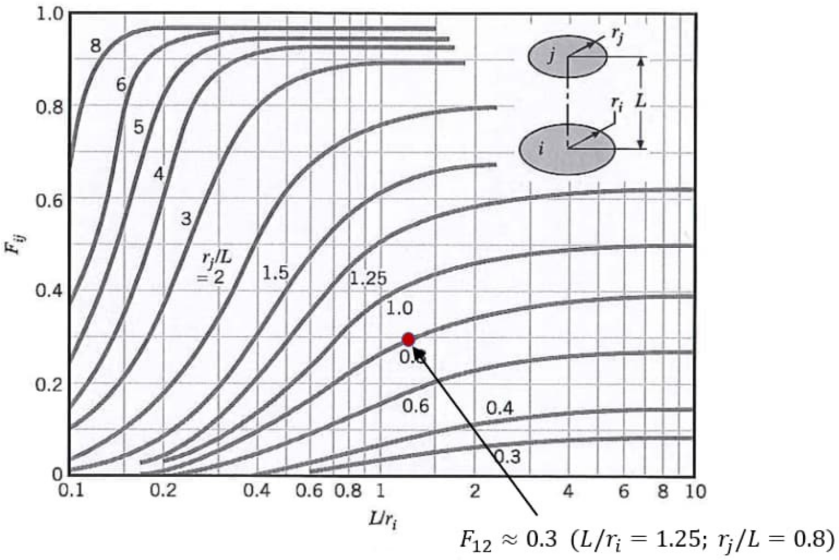
2. Tarkastellaan kuvan mukaista lieriömäistä uunia, jossa pinta 1 on pohja, pinta 2 on katto ja pinta 3 on vaippa. Uunin mitat ovat seuraavat: $H = 2$ m ja $R = 1.6$ m. Pintojen lämpötilat ja emissiviteetit ovat seuraavat: $T_1 = 600$ K; $T_2 = 500$ K; $T_3 = 450$ K; $\varepsilon_1 = 0.8$; $\varepsilon_2 = 1$; $\varepsilon_3 = 0.5$.




(a) Osoita, että näkyvyyskerroin $F_{12} = 0.3$ ja määritä kaikki muut geometriaan liittyvät näkyvyyskertoimet (8 kpl).

(b) Määritä nettosäteilyvirrat pinnoille 1 ja 2 ($\dot{Q}_1$ ja $\dot{Q}_2$).

Käyrästöstä: $F_{12} = 0.3$ $(= F_{21})$




Päättelemällä: $F_{11} = F_{22} = 0$

Muut näkyvyyskertoimet saadaan laskusääntöjä soveltamalla:

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1 \;\rightarrow\; F_{13} = 1 - F_{11} - F_{12} = 1 - 0 - 0.3 = 0.7$$

$$F_{23} = F_{13} = 0.7 \ \text{(symmetria)}$$

$$A_1F_{13} = A_3F_{31} \;\rightarrow\; F_{31} = \frac{A_1}{A_3}F_{13} = 0.4 \cdot 0.7 = 0.28 \qquad \left(\frac{A_1}{A_3} = \frac{\pi R^2}{2\pi RH} = \frac{R}{2H} = \frac{1.6}{2 \cdot 2} = 0.4\right)$$

$$F_{32} = F_{31} = 0.28 \ \text{(symmetria)}$$

$$F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1 \;\rightarrow\; F_{33} = 1 - F_{31} - F_{32} = 1 - 0.28 - 0.28 = 0.44$$

$$\rightarrow\ [F] = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.28 & 0.28 & 0.44 \end{bmatrix}$$

(b)

$J$-yhtälöt pinnoille:

Pinta 1: $J_1 + \left(\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)[F_{12}(J_1 - J_2) + F_{13}(J_1 - J_3)] = E_{b1}$

Pinta 2: $J_2 + \left(\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)[F_{21}(J_2 - J_1) + F_{23}(J_2 - J_3)] = E_{b2}$

Pinta 3: $J_3 + \left(\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\right)[F_{31}(J_3 - J_1) + F_{32}(J_3 - J_2)] = E_{b3}$

$E_{b1} = \sigma T_1^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (600)^4 = 7348.3\ \mathrm{W/m^2}$

$E_{b2} = \sigma T_2^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (500)^4 = 3543.8\ \mathrm{W/m^2}$

$E_{b3} = \sigma T_3^4 = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (450)^4 = 2325.1\ \mathrm{W/m^2}$

Koska pinta 2 on ”musta” eli $\varepsilon_2 = 1$, $J$-arvo pinnalle saadaan seuraavasti:

$J_2 = E_{b2} = 3543.8\ \mathrm{W/m^2}$

Tämän jälkeen jää seuraavat kaksi yhtälöä:

$$J_1 + \left(\frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right)[F_{12}(J_1 - J_2) + F_{13}(J_1 - J_3)] = E_{b1}$$

$$J_3 + \left(\frac{1-\varepsilon_3}{\varepsilon_3}\right)[F_{31}(J_3 - J_1) + F_{32}(J_3 - J_2)] = E_{b3}$$

Kun sijoitetaan emissiviteetit ($\varepsilon_1 = 0.8$; $\varepsilon_3 = 0.5$), $E_b$-arvot, $J_2$-arvo sekä (a)-kohdassa määritetyt näkyvyyskertoimet, saadaan seuraavat yhtälöt:

$$J_1 + 0.25 \cdot [0.3 \cdot (J_1 - 3543.8) + 0.7 \cdot (J_1 - J_3)] = 7348.3$$

$$J_3 + 1 \cdot [0.28 \cdot (J_3 - J_1) + 0.28 \cdot (J_3 - 3543.8)] = 2325.1$$

Sievennyksen jälkeen saadaan:

$$1.25 \cdot J_1 - 0.175 \cdot J_3 = 7614.1$$

$$-0.28 \cdot J_1 + 1.56 \cdot J_3 = 3317.4$$

$$\rightarrow\ J_1 = 6553.7\ \mathrm{W/m^2};\ \ J_3 = 3302.8\ \mathrm{W/m^2}$$

Nettosäteilyvirrat pinnoille 1 ja 2:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\varepsilon_1 A_1}{1-\varepsilon_1}(E_{b1} - J_1) = \frac{0.8 \cdot 8.0425}{1-0.8} \cdot (7348.3 - 6553.7) = 25562\ \mathrm{W}$$

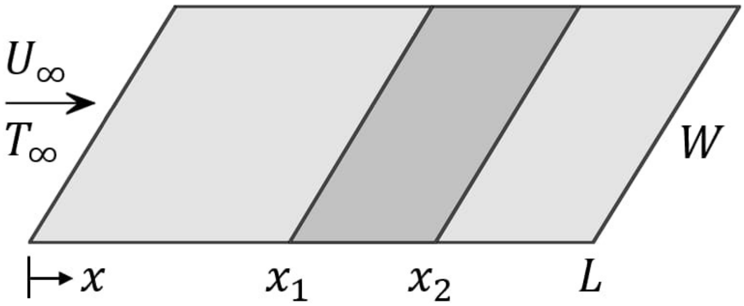
$$\dot{Q}_2 = A_2[F_{21}(J_2 - J_1) + F_{23}(J_2 - J_3)]$$
$$= 8.0425 \cdot [0.3 \cdot (3543.8 - 6553.7) + 0.7 \cdot (3543.8 - 3302.8)] \approx -5905\ \mathrm{W}$$

3. Ilmaa virtaa kuvan mukaisesti (kuva seuraavalla sivulla) tasolevyn toiselta puolelta siten, että $U_\infty = 9$ m/s ja $T_\infty = 20$ °C; levyn pituus $L = 100$ cm ja leveys $W = 70$ cm. Levyn pintalämpötila on 80 °C.

   (a) Määritä lämpövirta koko levystä. Oleta laminaari virtaus. Onko perusteltua olettaa laminaari virtaus (perustele vastauksesi)?

   (b) Määritä väliltä $x_1 < x < x_2$ siirtyvä lämpövirta, kun $x_1 = 45$ cm ja $x_2 = 70$ cm (oleta laminaari virtaus).

   Ilmalle $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5}$ m²/s; $k = 0.027$ W/(m °C); Pr = 0.7.




(a)

$$\mathrm{Re} = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{9 \cdot 1}{1.5 \cdot 10^{-5}} = 600000$$

$\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ (= 500000) $\rightarrow$ virtaus muuttuu turbulenttiseksi levyn loppupäässä

$$\mathrm{Nu} = 0.664\, \mathrm{Re}^{1/2} \mathrm{Pr}^{1/3} = 0.664 \cdot (600000)^{1/2} \cdot (0.7)^{1/3} = 456.7$$

$$\mathrm{Nu} = \frac{hL}{k} \quad \longrightarrow \quad h = \frac{\mathrm{Nu}\, k}{L} = \frac{456.7 \cdot 0.027}{1} = 12.33\ \mathrm{W/(m^2\ °C)}$$

Lämpövirta levystä on siis:

$$\dot{Q} = hA(T_s - T_\infty) = hLW(T_s - T_\infty) = 12.33 \cdot 1 \cdot 0.7 \cdot (80 - 20) \approx 518\ \mathrm{W}$$

(b)

Lämpövirta välille $x_1 \ldots x_2$ saadaan siten, että lasketaan lämpövirta välille $0 \ldots x_2$ sekä lämpövirta välille $0 \ldots x_1$, ja vähennetään saadut lämpövirrat toisistaan.

Saadaan siis:

$$\dot{Q}_{x_1 \ldots x_2} = \dot{Q}_{0 \ldots x_2} - \dot{Q}_{0 \ldots x_1}$$

$$\mathrm{Re}_{x_2} = \frac{U_\infty x_2}{\nu} = \frac{9 \cdot 0.7}{1.5 \cdot 10^{-5}} = 420000$$

$$\mathrm{Nu}_{0\ldots x_2} = 0.664\ \mathrm{Re}_{x_2}^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3} = 0.664 \cdot (420000)^{1/2} \cdot (0.7)^{1/3} = 382.08$$

$$\rightarrow\ h_{0\ldots x_2} = \frac{\mathrm{Nu}_{0\ldots x_2}\, k}{x_2} = \frac{382.08 \cdot 0.027}{0.7} = 14.74\ \mathrm{W/(m^2\ K)}$$

$$\rightarrow\ \dot{Q}_{0\ldots x_2} = h_{0\ldots x_2}\, x_2\, W (T_s - T_\infty)$$

$$= 14.74 \cdot 0.7 \cdot 0.7 \cdot (80 - 20) = 433.4\ \mathrm{W}$$

$$\mathrm{Re}_{x_1} = \frac{U_\infty x_1}{\nu} = \frac{9 \cdot 0.45}{1.5 \cdot 10^{-5}} = 270000$$

$$\mathrm{Nu}_{0\ldots x_1} = 0.664\ \mathrm{Re}_{x_1}^{1/2}\ \mathrm{Pr}^{1/3} = 0.664 \cdot (270000)^{1/2} \cdot (0.7)^{1/3} = 306.35$$

$$\rightarrow\ h_{0\ldots x_1} = \frac{\mathrm{Nu}_{0\ldots x_1}\, k}{x_1} = \frac{306.35 \cdot 0.027}{0.45} = 18.38\ \mathrm{W/(m^2\ K)}$$

$$\rightarrow\ \dot{Q}_{0\ldots x_1} = h_{0\ldots x_1}\, x_1\, W (T_s - T_\infty)$$

$$= 18.38 \cdot 0.45 \cdot 0.7 \cdot (80 - 20) = 347.4\ \mathrm{W}$$

Lämpövirta välille $x_1 \ldots x_2$ on siis:

$$\rightarrow\ \dot{Q}_{x_1\ldots x_2} = \dot{Q}_{0\ldots x_2} - \dot{Q}_{0\ldots x_1} = 433.4 - 347.4 = 86\ \mathrm{W}$$

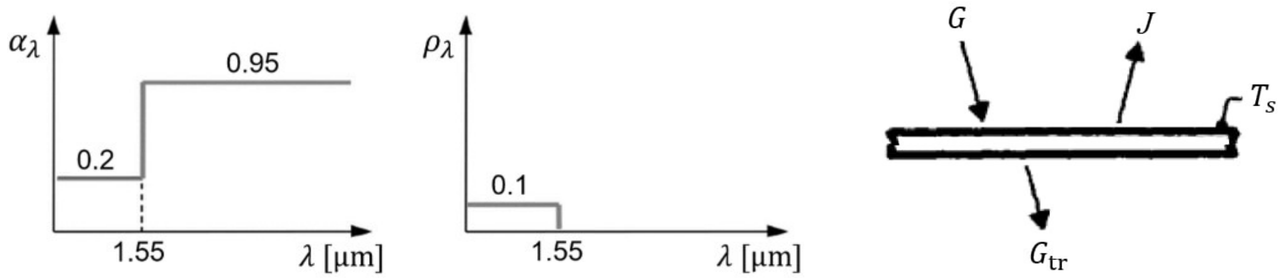
4. Osittain säteilyä läpäisevään muovilevyyn kohdistuu auringon säteily $G = 1000\ \mathrm{W/m^2}$ (auringon pintalämpötila on 5800 K). Levyn pintalämpötila $T_s = 350$ K. Levyn spektrinen absorptiosuhde ($\alpha_\lambda$) ja spektrinen heijastussuhde ($\rho_\lambda$) voidaan likimäärin kuvata seuraavasti (annettu myös kuvassa):

   $\alpha_\lambda = 0.2;\ \rho_\lambda = 0.1$ kun $\lambda < 1.55\ \mu\mathrm{m}$

   $\alpha_\lambda = 0.95;\ \rho_\lambda = 0$ kun $\lambda > 1.55\ \mu\mathrm{m}$

   (a) Määritä $G_{\mathrm{tr}}$ eli levyn läpi menevä säteily ($\mathrm{W/m^2}$).

   (b) Määritä levystä lähtevä säteily, $J$ (radiosity, $\mathrm{W/m^2}$).




Levyn kokonaisabsorptiosuhde $\alpha$, kokonaisheijastussuhde $\rho$ ja kokonaisläpäisysuhde $\tau$:

$T = 5800$ K; $\lambda_1 = 1.55\ \mu\mathrm{m} \longrightarrow \lambda_1 T = 1.55 \cdot 5800 = 8990\ \mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \approx\ 8990\ \mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \rightarrow f_{\lambda_1} = 0.890$

$$\alpha = \alpha_1 f_{\lambda_1} + \alpha_2 \left(1 - f_{\lambda_1}\right) = 0.890 \cdot 0.2 + (1 - 0.890) \cdot 0.95 = 0.2825$$

$$\rho = \rho_1 f_{\lambda_1} + \rho_2 \left(1 - f_{\lambda_1}\right) = 0.890 \cdot 0.1 + (1 - 0.890) \cdot 0 = 0.089$$

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \longrightarrow \tau = 1 - \alpha - \rho = 1 - 0.2825 - 0.089 = 0.6285$$

Levyn kokonaisemissiviteetti $\varepsilon$ (Kirchhoffin laki: $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$):

$T = 350$ K; $\lambda_1 = 1.55\ \mu\mathrm{m} \longrightarrow \lambda_1 T = 1.55 \cdot 350 = 543\ \mu\mathrm{m}\cdot\mathrm{K} \rightarrow f_{\lambda_1} = 0$

$\longrightarrow \varepsilon = 0.95$

(a)

$$G_{\mathrm{tr}} = \tau G = 0.6285 \cdot 1000 = 628.5\ \mathrm{W/m^2}$$

(b)

$$J = \rho G + \varepsilon E_b = \rho G + \varepsilon \sigma T_s^4 = 0.089 \cdot 1000 + 0.95 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (350)^4 = 897.3\ \mathrm{W/m^2}$$

5. Vastavirtalämmönvaihtimessa jäähdytetään öljyä vedellä. Öljyn massavirta on 2.8 kg/s ja veden 1.0 kg/s. Öljyn alkulämpötila on 130 °C ja veden 25 °C. Lämmönvaihtimen lämmönsiirtopinta-ala $A = 6\ \mathrm{m}^2$ ja lämmönläpäisykerroin $U = 900\ \mathrm{W/(m^2\ K)}$. Ominaislämpö öljylle $c_p = 2.0\ \mathrm{kJ/(kg\ K)}$ ja vedelle $c_p = 4.2\ \mathrm{kJ/(kg\ K)}$.
   (a) Määritä virtausten loppulämpötilat sekä lämpövirta.
   (b) Pitkäaikaisen käytön seurauksena lämmönvaihdin on likaantunut ja sen lämmönsiirtokyky täten heikentynyt (eli $U$ pienentynyt). Mihin arvoon $U$ on pienentynyt, jos likaantuneella lämmönvaihtimella saadaan öljy jäähdytettyä lämpötilaan 90 °C? Mikä on tällöin lämpövirta? Alkulämpötilat, pinta-ala, massavirrat ja ominaislämmöt kuten edellä.

$$C_C = (\dot{m}c_p)_C = 1 \cdot 4200 = 4200\ \mathrm{W/K} = C_{\min}$$

$$C_H = (\dot{m}c_p)_H = 2.8 \cdot 2000 = 5600\ \mathrm{W/K} = C_{\max}$$

$$R_C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{4200}{5600} = 0.75$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{900 \cdot 6}{4200} = 1.286$$

$$\rightarrow\ \varepsilon = \frac{1 - \exp[-NTU(1 - R_C)]}{1 - R_C \exp[-NTU(1 - R_C)]} = \frac{1 - \exp[-1.286 \cdot (1 - 0.75)]}{1 - 0.75 \cdot \exp[-1.286 \cdot (1 - 0.75)]} = 0.603$$

$$\dot{Q}_{max} = C_{\min}\left(T_{H,in} - T_{C,in}\right) = 4200 \cdot (130 - 25) = 441000\ \mathrm{W}$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}}\ \rightarrow\ \dot{Q} = \varepsilon \dot{Q}_{max} = 0.603 \cdot 441000 \approx 266000\ \mathrm{kW}$$

$$\dot{Q} = C_H\left(T_{H,in} - T_{H,out}\right)\ \rightarrow\ T_{H,out} = T_{H,in} - \frac{\dot{Q}}{C_H} = 130 - \frac{266000}{5600} = 82.5\ \text{°C}$$

$$\dot{Q} = C_C\left(T_{C,out} - T_{C,in}\right)\ \rightarrow\ T_{C,out} = T_{C,in} + \frac{\dot{Q}}{C_H} = 25 + \frac{266000}{4200} = 88.3\ \text{°C}$$

(b)

$$\dot{Q} = C_H\left(T_{H,in} - T_{H,out}\right) = 5600 \cdot (130 - 90) = 224000\ \mathrm{W}$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{max}} = \frac{224000}{441000} = 0.508$$

$$NTU = \frac{1}{1 - R_C} \ln\left(\frac{1 - \varepsilon R_C}{1 - \varepsilon}\right) = NTU = \frac{1}{1 - 0.75} \cdot \ln\left(\frac{1 - 0.508 \cdot 0.75}{1 - 0.508}\right) = 0.919$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} \;\rightarrow\; U = \frac{NTU\, C_{\min}}{A} = \frac{0.919 \cdot 4200}{6} \approx 643\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$$

(b)-kohdan voi ratkaista myös käyttämällä logaritmiseen keskilämpötilaeroon perustuvaa menetelmää:

$$\dot{Q} = C_C\left(T_{C,out} - T_{C,in}\right) \;\rightarrow\; T_{C,out} = T_{C,in} + \frac{\dot{Q}}{C_C} = 25 + \frac{224000}{4200} = 78.3\ ℃$$

$$\Delta T_1 = T_{H,out} - T_{C,in} = 90 - 25 = 65\ ℃$$

$$\Delta T_2 = T_{H,in} - T_{C,out} = 130 - 78.3 = 51.7\ ℃$$

$$\rightarrow\; \Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1/\Delta T_2)} = \frac{(65 - 51.7)}{\ln(65/51.7)} \approx 58.1\ ℃$$

$$\dot{Q} = UA\,\Delta T_{\mathrm{lm}} \;\rightarrow\; U = \frac{\dot{Q}}{A\,\Delta T_{\mathrm{lm}}} = \frac{224000}{6 \cdot 58.1} \approx 643\ \mathrm{W/(m^2\,K)}$$