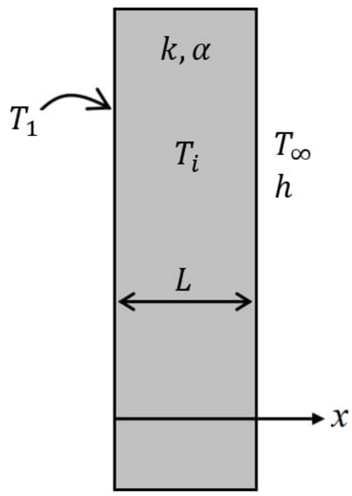
Tampereen yliopisto
YEB.421 LÄMMÖNSIIRTO
Välikoe 1: 29.2.2024, ratkaisut

1. Kuvan mukaisen levyn paksuus on L ja lämpötila alkutilanteessa on T_i. Tietyllä hetkellä levyn vasemman reunan ($x = 0$) lämpötila muuttuu arvoon T_1 ($T_1 > T_i$). Levyn oikealta reunalta lämpö siirtyy ympäristöön konvektiolla; lämmönsiirtokerroin on h ja ympäristön lämpötila T_∞ ($= T_i$). Levymateriaalin lämmönjohtavuus on k ja terminen diffusiviteetti α. Johtuminen levyssä on 1-ulotteista (x-suunta).



(a) Kirjoita kuvan koordinaatistossa yhtälö sekä alku- ja reunaehdot, joista voidaan ratkaista lämpötilajakauma, $T(x, t)$ (ei tarvitse ratkaista tässä a-kohdassa mitään, eikä sijoittaa lukuarvoja).

(b) Arvioi, miten pitkä aika kuluu siihen, kun levyn keskikohdan (eli kohdan $x = L/2$) lämpötila saavuttaa arvon 26 °C, kun $L = 20$ cm, $T_1 = 100$ °C, $T_i = 20$ °C, $k = 1.8$ W/(m K), $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$ m^2/s, $h = 20$ W/(m^2 K) ja $T_\infty = 20$ °C. Perustele myös, miksi käyttämääsi menetelmää voidaan soveltaa tässä tapauksessa.

(c) Lopuksi saavutetaan stationääri eli ajasta riippumaton tilanne. Mikä on tällöin lämpötilajakauma, $T(x)$, levyssä? Sijoita lämpötilajakauman lausekkeeseen annetut lukuarvot (ks. b-kohta) ja sievennä lauseke loppuun saakka.

(a)

Yhtälö: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

Alkuehto: $T(x, 0) = T_i$

Reunaehto 1: $T(0, t) = T_1$ Reunaehto 2: $-k \dfrac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h[T(L, t) - T_\infty]$

(b)

Sovelletaan puoliäärettömän kappaleen teoriaa (tarkistetaan soveltuvuus lopuksi)

$$\theta = \frac{T - T_i}{T_s - T_i} = \frac{26 - 20}{100 - 20} = 0.075 \ \rightarrow \ \eta \approx 1.26$$

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}} \ \rightarrow \ t = \frac{1}{4\alpha}\left(\frac{x}{\eta}\right)^2 = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} \cdot \left(\frac{0.1}{1.26}\right)^2 \approx 394 \text{ s}$$

$$\text{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{4 \cdot 10^{-6} \cdot 394}{(0.2)^2} = 0.0394 < 0.05 \quad \text{(ok)}$$

(c)

Stationäärissä tilanteessa: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0 \;\rightarrow\; T(x) = C_1 x + C_2$

$T(0) = T_1 \rightarrow\; C_2 = T_1 = 100\ °\mathrm{C} \;\rightarrow\; T(x) = C_1 x + T_1$

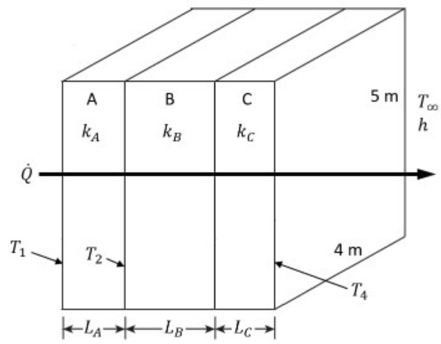
$$-k\frac{dT(L)}{dx} = h[T(L) - T_\infty]$$

$$\rightarrow\; -kC_1 = h(C_1 L + T_1 - T_\infty)$$

$$\rightarrow\; C_1 = \frac{h(T_\infty - T_1)}{k + hL} = \frac{20 \cdot (20 - 100)}{1.8 + 20 \cdot 0.2} = -275.86$$

Lämpötilajakauma on siis: $T(x) = -275.86x + 100$

2. Kuvan mukainen seinämä muodostuu kolmesta kerroksesta. Kerrosten paksuudet ja lämmönjohtavuudet ovat seuraavat: $L_A = 16$ cm, $L_B = 20$ cm, $L_C = 15$ cm, $k_A = 1.2$ W/(m K), $k_B = 0.3$ W/(m K), $k_C = 1.5$ W/(m K). Seinämän sisäpinnan lämpötila (T_1) on 800 °C. Ulkopinnalta lämpö siirtyy ympäristöön konvektiolla: lämmönsiirtokerroin $h = 10$ W/(m^{2}K) ja ympäröivän ilman lämpötila $T_\infty = 20$ °C. Tilanne on stationääri ja johtuminen seinämässä 1-ulotteista.



(a) Määritä lämpövirta 5 m korkean ja 4 m leveän seinämän läpi sekä lämpötila T_2.
(b) Ulkopinnan lämpötilaa, T_4, halutaan laskea muuttamalla kerroksen B materiaalia. Mikä pitää olla kerroksen B lämmönjohtavuus, k_B, jotta T_4 olisi ≤ 75 °C (muut lähtöarvot pysyvät ennallaan).

(a)

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{tot}} = \frac{T_1 - T_\infty}{\frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A} + \frac{1}{hA}} = \frac{800 - 20}{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{0.16}{1.2} + \frac{0.2}{0.3} + \frac{0.15}{1.5} + \frac{1}{10}\right)} = \frac{780}{0.05} = 15600\ \mathrm{W}$$

$$\dot{Q} = \frac{k_A A (T_1 - T_2)}{L_A} \;\rightarrow\; T_2 = T_1 - \frac{\dot{Q} L_A}{k_A A} = 800 - \frac{15600 \cdot 0.16}{1.2 \cdot 20} = 696\ °\mathrm{C}$$

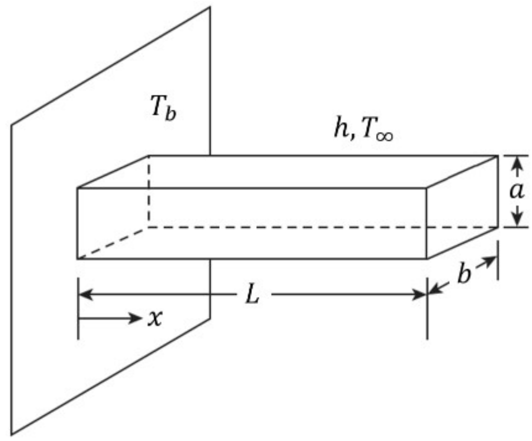
(b)

$Q = hA(T_4 - T_\infty) = 10 \cdot 20 \cdot (75 - 20) = 11000$ W (lämpövirta muuttuu!)

$$Q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A} + \frac{L_C}{k_C A}} = \frac{800 - 75}{\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{0.16}{1.2} + \frac{0.2}{k_B} + \frac{0.15}{1.5}\right)} = 11000\ \mathrm{W} \;\rightarrow\; k_{B,\max} = 0.184\ \mathrm{W/(m\,K)}$$

3. Kuvan mukaisen suorakulmaisen rivan mitat ovat: $L = 70\ \text{mm}, a = 5\ \text{mm}, b = 8\ \text{mm}$. Ripamateriaali on teräs, jolle lämmönjohtavuus on 50 W/(m K). Ympäröivän ilman lämpötila $T_\infty = 20$ °C ja lämmönsiirtokerroin rivasta ilmaan $h = 10\ \text{W/(m}^2\ \text{K)}$. Pinta, johon ripa asennetaan, on lämpötilassa $T_b = 100$ °C, jonka voi olettaa myös rivan tyvilämpötilaksi. Määritä rivan kautta siirtyvä lämpövirta. Rivan kärjen voi olettaa eristetyksi.

   Kuvan mukaisia ripoja asennetaan N kpl neliön muotoiseen pintaan (80 mm × 80 mm), joka on lämpötilassa 100 °C. Montako ripaa tarvitaan, jotta lämmönsiirto pinnasta saataisiin viisinkertaiseksi verrattuna tilanteeseen, jossa ripoja ei ole lainkaan?



$$P = 2(a+b) = 2 \cdot (0.008 + 0.005) = 0.026\ \text{m}$$

$$A_c = ab = 0.008 \cdot 0.005 = 4 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2$$

$$m = \left(\frac{hP}{kA_c}\right)^{1/2} = \left[\frac{10 \cdot 0.026}{50 \cdot 4 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^2}\right]^{1/2} = 11.40\ 1/\text{m}$$

Lämpövirta yhden rivan kautta:

$$\dot{Q} = kA_c m(T_b - T_\infty)\tanh(mL) = 50 \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 11.4 \cdot (100 - 20) \cdot \tanh(11.4 \cdot 0.07) = 1.209\ \text{W}$$

Lämpövirta voidaan määrittää myös ripahyötysuhteen avulla:

$$\eta_f = \frac{\tanh(mL)}{mL} = \frac{\tanh(11.4 \cdot 0.07)}{11.4 \cdot 0.07} = 0.8307$$

$$\dot{Q} = \eta_f\,\dot{Q}_{ideal} = \eta_f\,hPL(T_b - T_\infty) = 0.8307 \cdot 10 \cdot 0.026 \cdot 0.07 \cdot (100 - 20) = 1.209\ \text{W}$$

Määritetään tarvittavien ripojen lukumäärä käyttämällä rivaston kokonaistehokkuutta, ε_{tot}:

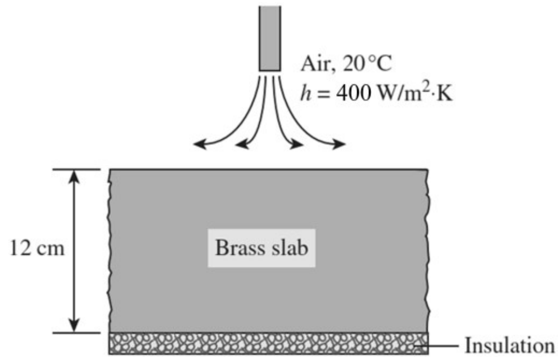
$$\varepsilon_{tot} = \frac{A_{uf} + \eta_f\,A_f}{A_{no-fin}} = \frac{(A_{no-fin} - NA_c) + \eta_f\,NPL}{A_{no-fin}}$$

$$= \frac{[(0.08)^2 - 4 \cdot 10^{-5}N] + 0.8307 \cdot N \cdot 0.026 \cdot 0.07}{(0.08)^2} = 5$$

$\rightarrow N = 17.4$

$\rightarrow$ tarvitaan 18 ripaa

4. Messinkilevyä, jonka paksuus on 12 cm ja alkulämpötila 600 °C, jäähdytetään kuvan mukaisesti yläpinnalta ilmasuihkuilla; ilman lämpötila on 20 °C ja lämmönsiirtokerroin 400 W/(m^2 K). Alapuolelta levy on eristetty. Messingille $k = 120$ W/(m K), $\rho = 8500$ kg/m^3 ja $c =$ 380 J/(kg K). Määritä levyn yläpinnan lämpötila, kun levyä on jäähdytetty 10 min. Paljonko levystä on tällöin poistunut lämpöä pinta-alayksikköä kohden. Johtuminen levyssä on yksiulotteista.



Eristetty reuna vastaa symmetriatasoa. Tämän tehtävän ratkaisu menee siis samalla tavalla kuin sellaisen tehtävän, jossa levyn paksuus on 20 mm ja jäähdytys tapahtuu levyn molemmilta puolilta samalla tavalla (sama h ja T_∞).

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{120}{8500 \cdot 380} = 3.715 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{3.715 \cdot 10^{-5}\ \cdot 600}{(0.12)^2} = 1.548 > 0.2 \quad \rightarrow \quad \text{yksi termi sarjasta riittää}$$

$$\mathrm{Bi} = \frac{hL}{k} = \frac{400 \cdot 0.12}{120} = 0.4 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0.5932; A_1 = 1.0580; B_1 = 0.9424$$

Dimensioton lämpötila levyn yläpinnalla ($\eta = 1$):

$$\theta = A_1\, e^{-\lambda_1^2 \mathrm{Fo}} \cos(\lambda_1 \eta) = 1.058 \cdot\ e^{-(0.5932)^2 \cdot 1.548} \cdot \cos(0.5932 \cdot 1) = 0.5088$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} \ \rightarrow\ T = \theta(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.5088 \cdot (600 - 20) + 20 = 315.1\ \text{°C}$$

Dimensioton keskilämpötila:

$$\bar{\theta} = \ A_1\, e^{-\lambda_1^2 \mathrm{Fo}} B_1 = 1.058 \cdot e^{-(0.5932)^2 \cdot 1.548} \ \cdot 0.9424 = 0.5783$$

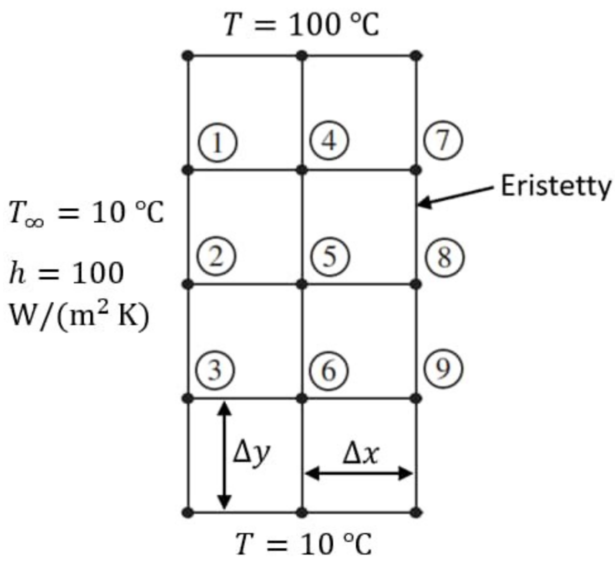
$$\bar{\theta} = \frac{\bar{T} - T_\infty}{T_i - T_\infty} \ \rightarrow\ \bar{T} = \bar{\theta}(T_i - T_\infty) + T_\infty = 0.5783 \cdot (600 - 20) + 20 = 355.4\ \text{°C}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{Q}}{A} = \rho L c (T_i - \bar{T}) = 8500 \cdot 0.12 \cdot 380 \cdot (600 - 355.4) = 94.8 \cdot 10^6\ \mathrm{J} \approx 95\ \mathrm{MJ}$$

5. Differenssimenetelmää käyttäen ratkaistaan stationääri lämpötilajakauma kuvan mukaisessa 2-ulotteisessa suorakulmaisessa geometriassa (4 cm × 8 cm). Reunaehtoina on annettu lämpötilat ala- ja yläpinnoilla sekä konvektiivinen lämmönsiirtokerroin ja ympäristön lämpötila vasemmalla reunalla; oikea reuna on lämpöeristetty. Materiaalille $k = 4$ W/(m K) ja $\Delta x = \Delta y = 2$ cm.

Määritä lämpötilat solmupisteissä 2, 4, 6 ja 9, jos lämpötilat muissa solmupisteissä ovat seuraavat:

$T_1 = 55.85$ °C; $T_3 = 21.01$ °C; $T_5 = 43.23$ °C; $T_7 = 70.09$ °C; $T_8 = 45.77$ °C.



Piste 4:

$$T_1 + T_5 + T_7 + 100 - 4T_4 = 0$$

$$\rightarrow\ T_4 = \frac{T_1 + T_5 + T_7 + 100}{4} = \frac{55.85 + 43.23 + 70.09 + 100}{4} = 67.29\ \text{°C}$$

Piste 2:

$$2T_5 + T_1 + T_3 + \frac{2h\Delta x}{k}T_\infty - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_2 = 0$$

$$\frac{2h\Delta x}{k}T_\infty = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0.02}{4} \cdot 10 = 10 \qquad 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right) = 2 \cdot \left(\frac{100 \cdot 0.02}{4} + 2\right) = 5$$

$$\rightarrow\ 2T_5 + T_1 + T_3 + 10 - 5T_2 = 0$$

$$\rightarrow\ T_2 = \frac{2T_5 + T_1 + T_3 + 10}{5} = \frac{2 \cdot 43.23 + 55.85 + 21.01 + 10}{5} = 34.66\ \text{°C}$$

Pisteet 6 & 9:

$$T_3 + T_5 + T_9 + 10 - 4T_6 = 0\ \rightarrow\ 4T_6 - T_9 = T_3 + T_5 + 10 = 21.01 + 43.23 + 10 = 74.24$$

$$2T_6 + T_8 + 10 - 4T_9 = 0\ \rightarrow\ -2T_6 + 4T_9 = T_8 + 10 = 45.77 + 10 = 55.77$$

$$4T_6 - T_9 = 74.24$$

$$-2T_6 + 4T_9 = 55.77$$

$$\rightarrow\ T_9 = 26.54\ \text{°C}\ ;\ \ T_6 = 25.20\ \text{°C}$$