



Usean muuttujan funktiot

Tentti 16.10.2024 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta

Muista, että jokaisessa tehtävässä pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Erään xy -tasolla olevan levyn eri pisteissä lämpötila

$$T(x, y) = 73 + \frac{7(x-1)^2}{4} - 3y^2.$$

- a) Mihin suuntaan xy -tasolla levyn lämpötila kasvaa voimakkaimmin pisteessä $A = (3, -1)$?
b) Linearisoi lämpötilafunktio pisteessä A .
c) Mihin suuntaan b-kohdassa laskemasi funktio kasvaa voimakkaimmin pisteessä $A = (3, -1)$?

2. Pinnan pisteet (x, y, z) toteuttavat yhtälön $xyz^2 = 2$. Etsi Lagrangen menetelmällä sellainen pinnan piste, joka on lähimpänä origoa ja jonka kaikki koordinaatit ovat positiivisia. Etäisyyden minimoinnissa valitse etäisyyden neliö eli etsi funktion $f : f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ pienin arvo, kun ollaan pinnalla. Paljonko on pienin etäisyys origosta?

3. a) Millä vakion $a > 0$ arvolla toteutuu

$$\int_2^a \int_0^{\frac{1}{x}} xe^{xy} dy dx = 3(e-1).$$

- b) Jos $x = 2s^2 + u^2$ ja $y = s^2 - 3u^2$, niin määritä Jacobin determinantin arvo $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, s)}$. Jos kyseessä on tasointegraalin laskemisessa koordinaatiston muunto, niin miten muuttuu tulos, jos henkilö valitsee muuttujien järjestyksen toisin eli laskee $\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, u)}$? Perustele!

4. Laske

$$\iiint_T 6z dV,$$

$$\text{kun } T = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 3-x^2-y^2\}.$$