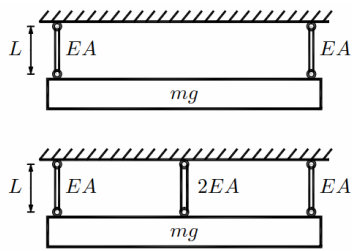


1.



- a) Oheista hyvin jäykkää palkkia ($m = 200 \text{ kg}$) kannatellaan kuvan mukaisesti symmetrisesti kahdella terästangolla, joiden halkaisija on 3 mm . Määritä tankojen normaali jännitys.
- b) Palkkia kannattelemaan lisätään kuvan mukaisesti keskelle palkkia kolmas terästanko, jonka poikkipinta-ala on kaksinkertainen a)-kohdan tankoihin verrattuna. Tällöin tehtävä muuttuu hyperstaattiseksi. Määritä keskimmaisessa tangossa vaikuttava normaali jännitys.

Ratkaistu:

a) Symmetria vuoksi voidaan olettaa N saavaksi kummassakin saavassa

$$\uparrow: 2N - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{2}$$

Poikkien $d = 3 \text{ mm}$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 7,07 \text{ mm}^2$$

JÄNNITYS SAUVUSSA

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{mg/2}{A} = \frac{2 \cdot mg}{\pi d^2} = 138,9 \text{ MPa}$$

b)

YHTÄSUORITUVUUSYHTÄLÖ:

$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\frac{N_1 L}{EA} = \frac{N_2 L}{2EA}$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2/2$$

$$\uparrow: 2N_1 + N_2 - mg = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{N_2}{2} + N_2 - mg = 0$$

$$\Rightarrow 2N_2 = mg \Rightarrow N_2 = \frac{mg}{2}$$

$$N_1 = \frac{N_2}{2} = \frac{mg}{4}$$

KESKIMMAISEN SAUVAN POIKKIPINTAA

$$A_2 = 2 \cdot 7,07 \text{ mm}^2 = 14,14 \text{ mm}^2$$

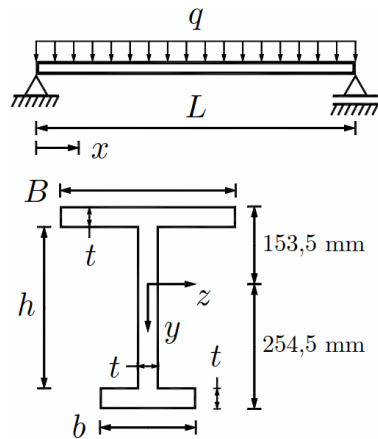
KESKIMMAISEN SAUVAN NORMAALI JÄNNITYS

$$N_2 = \frac{mg}{2}$$

NORMAALI JÄNNITYS

$$\sigma = \frac{N_2}{A_2} = 69,4 \text{ MPa}$$

2.



Oheista yksiaukkoista palkkia kuormittaa tasainen kuormitus $q = 16 \text{ kN/m}$. Palkin poikkileikkaus on kuvan mukainen, ja sen pintakeskiö on merkattu kuvaan (etäisyys yläreunasta $153,5 \text{ mm}$). Muut lähtötiedot: $t = 4 \text{ mm}$, $h = 400 \text{ mm}$, $b = 100 \text{ mm}$, $B = 300 \text{ mm}$, $L = 8 \text{ m}$.

- Laske taivutusjännityksen arvot poikkileikkauksen ylä- ja alareunoilla palkin keskijänteellä (eli kohdassa $x = L/2$).
- Laske leikkausjännityksen arvo alalaipan ja uuman rajapinnassa palkin vasemmassa päässä (eli kohdassa $x = 0$).
- Kuinka suuri aksiaalinen kuorma palkin pintakeskiöön olisi kohdistettava, jotta palkissa ei esiintyisi lainkaan vetojännityksiä.

2

RATKAISU:

PALKIN KESKIJÄNTEELLÄ

$$M_{\text{max}} = qL^2/8$$

PALKIN VAS. PÄÄSSÄ

$$Q_{\text{max}} = qL/2$$

PK. PALKIN ANNETTUIA LUKUARVOILIA ON $153,5 \text{ mm}$ YLÄREUNASTA

$t = 4 \text{ mm}$
 $h = 400 \text{ mm}$
 $b = 100 \text{ mm}$
 $B = 300 \text{ mm}$

TÄLLÖIN PL NELIÖMOMENTTI I_z ON

$$I_z = \frac{B^3}{12} + B \cdot 153,5^2 + \frac{t h^3}{12} + t h \cdot 50,5^2 + \frac{t b^3}{12} + t b \cdot 254,5^2$$

$$= 78,46 \text{ mm}^4$$

JÄNNITYKSET

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{I_z} \cdot (-153,5) = -250,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{min}} = \frac{M_{\text{max}}}{I_z} \cdot 254,5 = 415,2 \text{ MPa}$$

$S_z(y=254,5) = 4 \cdot 100 \cdot 254,5 = 10100 \text{ mm}^3$

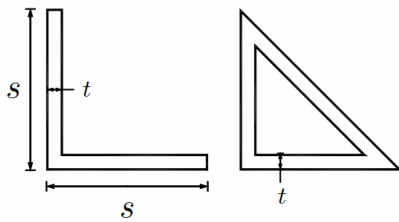
$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} \cdot S_z(y=254,5)}{I_z \cdot t} = 20,6 \text{ MPa}$$

JOTTA PL EI OLSI VETOJÄNNITYKSIÄ ON LISÄTÄVÄ NORMAALIVOIMA (PINTAKESKIÖN)

$$N = -415,2 \text{ MPa} \cdot A = 1,33 \cdot 10^6 \text{ N}$$

$$= 1,33 \text{ MN}$$

3.



Oheisen kuvan mukaisen poikkileikkauksen seinämän paksuus $t = 2 \text{ mm}$, ja sivun pituus $s = 120 \text{ mm}$. Laske poikkileikkauksen vääntöneliömomentin I_v arvo. Määritä kuinka moninkertaiseksi vääntöneliömomentti muuttuu, jos

- seinämän paksuus kasvatetaan arvoon 4 mm
- seinämän paksuudet pidetään alkuperäisinä (2 mm), mutta poikkileikkauksesta tehdään hitsaamalla suljettu kolmio oikeanpuoleisen kuvan mukaisesti.

3. Ratkaisu:

ALKUPERÄISEN POIKKILEIKKAUS

$t = 2 \text{ mm}$

$$\Rightarrow I_{v_1} = \frac{1}{3} \sum s_i t_i^3 = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 2^3 \text{ mm}^3 = 640 \text{ mm}^3$$

AVOIN PROFIILI SEINÄMÄN PAKSUUDELLA

$t = 4 \text{ mm}$

$$\Rightarrow I_{v_2} = \frac{1}{3} \cdot 240 \cdot 4^3 \text{ mm}^3 = 5120 \text{ mm}^3$$

SULJETTU PROFIILI SEINÄMÄN PAKSUUDELLA

$t = 2 \text{ mm}$

$$I_{v_3} = \frac{4A^2}{\sum s/t} = \frac{4 \left(120 \cdot 120 \cdot \frac{1}{2}\right)^2}{(120 + 120 + \sqrt{2} \cdot 120)/2} \text{ mm}^3$$

$$= 1012239 \text{ mm}^3$$

AVOIN PROFIILIN SEINÄMÄN VAHVENTAMINEN

$2 \text{ mm} \rightarrow 4 \text{ mm}$ KASVATTAM VÄÄNTÖJÄYKKYYDEN

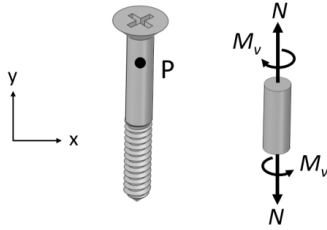
$$\frac{5120}{640} = 8 - \text{KERTAISEKSI}$$

AVOIN PROFIILIN MUUTAMINEN UHINAKAISEKSI:

KASVATTAM I_v :n

$$\frac{1012239}{640} = 1580 - \text{KERTAISEKSI}$$

4.



Teräsruvia (halkaisija $d = 8 \text{ mm}$) porataan puuhun vääntömomentilla $M_v = 12 \text{ Nm}$, jolloin ruuvin poikileikkaukseen syntyy leikkausjännitystä. Kun ruuvaamisen loppuvaiheessa ruuvin kanta painuu puun sisään, ruuviin syntyy myös $N = 3 \text{ kN}$ suuruinen vetorasitus. Määritä oheisessa kuvassa esitetyn ruuvin ulkopinnan pisteen P pääjännitykset ja -suunnat. Määritä lisäksi varmuus myötöön nähden, kun ruuviteräksen myötölujuus $R_e = 340 \text{ MPa}$. Käytä von Mises vertailujännitystä.

4. Ratkaisu

$N = 3000 \text{ N}$
 $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 8^2}{4} \text{ mm}^2$
 $\sigma = \frac{N}{A} = 59,7 \text{ MPa}$

$M_v = 12 \text{ Nm} = 12000 \text{ Nmm}$
 $W_v = \frac{\pi d^3}{16}$
 $\tau = \frac{M_v}{W_v} = 119,4 \text{ MPa}$

$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \tau & \sigma \end{bmatrix}$

Pääjännitykset ja -suunnat:
 $\begin{vmatrix} \sigma - \lambda & \tau \\ \tau & \sigma - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\lambda)(\sigma - \lambda) - \tau^2 = 0$
 $\Rightarrow \lambda^2 - \sigma\lambda - \tau^2 = 0$
 $\Rightarrow \lambda = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2}$
 $\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 153,9 & \leftarrow \lambda_1 \\ -93,2 & \leftarrow \lambda_2 \end{cases}$

$\begin{bmatrix} \sigma - \lambda_1 & \tau \\ \tau & \sigma - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\lambda_1 n_x + \tau n_y = 0$
 $\Rightarrow n_x = \frac{\tau}{\lambda_1} n_y$
 $\Rightarrow \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{\tau}{\lambda_1}\right)^2 + 1} \cdot n_y = 1$
 $\Rightarrow n_{y1} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tau}{\lambda_1}\right)^2 + 1}} = 0,79$ & $n_{x1} = 0,62$
 $\vec{n}_1 = \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,79 \end{bmatrix}$
 $\alpha = \arctan \frac{0,79}{0,62} \approx 52^\circ$

von Mises vertailujännitys 215,2 MPa.

von Mises vertailujännitys 215,2 MPa.

(Tässä "malliratkaisussa" M_v suunta on väärin. Tämä vaikuttaa pääsuuntiin, mutta ei pääjännityksien arvoihin. Korjaan malliratkaisun myöhemmin...)