MATH.APP.410 Matriisilaskenta (kevät 2024) / Mattila
Tentti 27.2.2024

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Olkoon $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorit, joille on voimassa $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$. Osoita, että tällöin vektorit $(1+i)\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ ja $(3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}$ ovat keskenään ortogonaaliset. (3p)

   (b) Määritä reaalisten vakioiden a ja b arvot niin, että alla oleva yhtälö toteutuu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}. \quad \text{(3p)}$$

2. (a) Muodosta LU-hajotelma matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad \text{(3p)}$$

   (b) Päättele (a)-kohdassa saamasi LU-hajotelman avulla, mitä on $\operatorname{rank}(A)$. (1p)

   (c) Mitä (a)-kohdan hajotelman perusteella voidaan sanoa homogeeniyhtälöiden $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ja $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ lineaarisesti riippumattomien ratkaisuvektoreiden lukumäärästä? (2p)

3. (a) Osoita määritelmän avulla oikeaksi tai vastaesimerkin avulla vääräksi: jos $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ ovat vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruuksia, niin tällöin niiden yhdiste

$$\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_1 \text{ tai } \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_2\}$$

   on myös vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruus. (3p)

   (b) Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 6 \end{bmatrix}$, missä a on jokin tuntematon reaaliluku. Selvitä, miten luvut $\dim(\mathcal{N}(A))$ ja $\operatorname{rank}(A)$ riippuvat parametrin a arvosta. (3p)

4. (a) Ovatko seuraavat väitteet oikein vai väärin? Perustele vastauksesi lyhyesti. (1p/kohta)

   (i) Jos $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ on kolmiomatriisi diagonaalialkioinaan $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, niin $\sigma(A) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.

   (ii) Jos matriisilla $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ on kaksi erisuurta ominaisarvoa, niin matriisilla A voi olla korkeintaan kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, yksi kumpaakin ominaisarvoa kohti.

   (iii) Jos neliömatriisin A kaikki alkiot ovat reaalisia, niin on silti mahdollista, että matriisilla A on täsmälleen yksi kompleksinen ominaisarvo $\lambda = a + ib$, missä $b \neq 0$.

   (b) Etsi kaikki mahdolliset muuttujan k arvot, joilla matriisista

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & k \\ k & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

   tulee projektorimatriisi, ja määritä vektorin $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ projektio kussakin tapauksessa. Onko P tavallinen vai ortogonaaliprojektorimatriisi? (3p)

MATH.APP.410 Matrix Analysis (spring 2024) / Mattila
Final Exam 27.2.2024

Neither calculators nor own materials are allowed in the exam. You do not have to return this question paper. The solutions for the problems can be found later from the course's Moodle page. If you prefer, you can answer the questions in Finnish instead of English.

1. (a) Let $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ be two vectors satisfying the condition $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$. Show that the vectors $(1+i)\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ and $(3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}$ are orthogonal to each other. (3p)

   (b) Determine the values of the constants a and b so that the following equation holds:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}. \quad \text{(3p)}$$

2. (a) Form the LU decomposition for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}. \quad \text{(3p)}$$

   (b) Using the LU decomposition found in part (a), find out $\operatorname{rank}(A)$. (1p)

   (c) Based on the LU decomposition found in part (a), what can you say about the number of linearly independent solutions for the homogenous matrix equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ and $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$? (2p)

3. (a) Prove right by using the definition or wrong by giving a counterexample: if $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ are subspaces of the vector space $\mathbb{C}^n$, then their union

$$\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_1 \text{ or } \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_2\}$$

   is another subspace of the vector space $\mathbb{C}^n$. (3p)

   (b) Consider the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 6 \end{bmatrix}$, where a is some unknown real number. Find out hot the numbers $\dim(\mathcal{N}(A))$ and $\operatorname{rank}(A)$ depend on the value of the parameter a. (3p)

4. (a) Are the following claims true or false? Justify your answers shortly. (1p each)

   (i) If $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ is a triagular matrix with $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ as its diagonal elements, then $\sigma(A) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.

   (ii) If a matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ has two distinct eigenvalues, then the matrix A can have at most two linearly independent eigenvectors, one for each eigenvalue.

   (iii) If all the elements of a square matrix A are real numbers, then it is possible that the matrix A has exactly one complex eigenvalue $\lambda = a + ib$, where $b \neq 0$.

   (b) Find all possible values of the variable k such that the matrix

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & k \\ k & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

   becomes a projector matrix, and find out the projection of the vector $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in each case. Is P a regular or an orthogonal projector matrix? (3p)