MATH.APP.410 Matriisilaskenta (kevät 2024) / Mattila
Tentin 27.2.2024 ratkaisut

1. (a) Oletus: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ ovat vektoreita, joille on voimassa $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$.
Väite: vektorit $(1+i)\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}$ ja $(3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}$ ovat keskenään ortogonaaliset.

Todistus. Sisätulon ominaisuuksia hyödyntämällä saadaan

$$\begin{aligned}
&\langle (1+i)\boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}, (3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \overline{(1+i)}\langle \boldsymbol{x}, (3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}\rangle + \overline{-i}\langle \boldsymbol{y}, (3-2i)\boldsymbol{x} - (5+i)\boldsymbol{y}\rangle \\
&= (1-i)(3-2i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + (1-i)(-5-i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + i(3-2i)\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + i(-5-i)\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= (1-5i)\|\boldsymbol{x}\|^2 + (-6+4i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + (2+3i)\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + (1-5i)\|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= 1 - 5i + (-6+4i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + (2-3i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + (1-5i) = 2 - 10i + (-4+i)\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle.
\end{aligned}$$

Jotta vektorit olisivat ortogonaaliset, pitäisi yllä olevasta lausekkeesta tulla arvoksi 0. Tehtävänannon vektoreiden kertoimille on kuitenkin tullut hieman väärät lukuarvot, minkä vuoksi lauseke ei sievene tästä enempää (tekemättä lisäoletuksia vektoreista $\boldsymbol{x}$ ja $\boldsymbol{y}$). Oikealla idealla tehdystä todistusyrityksestä saa kuitenkin täydet pisteet, vaikka itse todistus jäisikin kesken. □

(b) Tehtävänä on määritää reaalisten vakioiden a ja b arvot niin, että yhtälö

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

toteutuu. Vakioille saadaan muodostettua yhtälöryhmä kertomalla annettu matriisi A ja sen käänteismatriisi keskenään kummin tahansa päin ja vaatimalla, että lopputuloksena on tultava identiteettimatriisi:

$$\begin{aligned}
I_4 = A^{-1}A &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 4a-3b & -a+2b & -a+2b & -a+2b \\ -a+2b & 4a-3b & -a+2b & -a+2b \\ -a+2b & -a+2b & 4a-3b & -a+2b \\ -a+2b & -a+2b & -a+2b & 4a-3b \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 4a - 3b = 1, \\ -a + 2b = 0, \end{cases}$$

jonka ratkaisuksi saadaan $b = \frac{1}{5}$ ja $a = \frac{2}{5}$.

2. (a) Matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

LU-hajotelman löytämiseksi aloitetaan merkitsemällä

$$\boldsymbol{l}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad L_1 = I - \boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{e_1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan

$$L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seuraavassa iteraatiossa pivot-alkioksi tulee neljännen sarakkeen kolmas alkio, sillä toinen ja kolmas sarake ovat jo valmiiksi yläkolmiomuodossa. Saadaan

$$\boldsymbol{l}_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad L_2 = I - \boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{e_3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan

$$L_2 L_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Enempiä iteraatioita ei siis tarvita. Lisäksi

$$L = (L_2 L_1)^{-1} = I + \boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{e_1}^T + \boldsymbol{l}_2 \boldsymbol{e_3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lopuksi voidaan vielä tarkistaa, että

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -6 & 3 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = A.$$

(b) Matriisin A aste saadaan nyt pääteltyä suoraan LU-hajotelman perusteella laskemalla porrasalkioiden lukumäärä matriisista U. Niitä on kolme kappaletta, joten $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = 3$.

(c) Dimensiolauseen avulla voidaan nyt päätellä 4×5-matriisille A, että $\dim(\mathcal{N}(A)) = 5 - \operatorname{rank}(A) = 5 - 3 = 2$. Homogeeniyhtälölle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ voidaan siis löytää kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisuvektoria. Samaan tapaan 5×4-matriisin A^T tapauksessa voidaan päätellä, että $\dim(\mathcal{N}(A^T)) = 4 - \operatorname{rank}(A^T) = 4 - \operatorname{rank}(A) = 4 - 3 = 1$. Homogeeniyhtälölle $A^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ on siis olemassa yksi lineaarisesti riippumaton ratkaisuvektori.

3. (a) Oletus: jos $\mathcal{S}_1$ ja $\mathcal{S}_2$ ovat vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruuksia.
Väite: yhdiste

$$\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_1 \text{ tai } \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_2\}$$

ei ole vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruus.

Todistus. Joukko $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ on suljettu skalaarikertolaskun suhteen, mutta ei vektoreiden yhteenlaskun suhteen. Osoitetaan väite vääräksi tarkastelemalla vastaesimerkkiä, missä $n = 2$, $\mathcal{S}_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$ ja $\mathcal{S}_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2\}$. Tällöin

$$\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \,\big|\, x_1 = 0 \text{ tai } x_2 = 0\}.$$

Nyt selvästi $\boldsymbol{e}_1 \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ja $\boldsymbol{e}_2 \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ (koska $\boldsymbol{e}_1 \in \mathcal{S}_1 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_1\}$ ja $\boldsymbol{e}_2 \in \mathcal{S}_2 = \operatorname{span}\{\boldsymbol{e}_2\}$), mutta $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 = (1, 1) \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Väite on siis väärä. □

Huom. Voidaan osoittaa, että jos $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ on aliavaruus, niin tällöin on oltava joko $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ tai $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_1$.

(b) Tarkastellaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 6 \end{bmatrix}$, missä a on jokin tuntematon reaaliluku. Pitää tutkia, miten luvut $\dim(\mathcal{N}(A))$ ja $\operatorname{rank}(A)$ riippuvat parametrin a arvosta. Huomataan ensin, että matriisin A sarakkeet 2 ja 3 ovat toistensa skalaarimonikertoja (sarake 3 saadaan sarakkeesta 2 kertomalla se skalaarilla $\frac{3}{2}$). Jos $a = 2$, niin tällöin myös sarakkeet 1 ja 2 ovat toistensa skalaarimonikertoja. Tässä tapauksessa matriisissa A on siis vain yksi lineaarisesti riippumaton sarakevektori, jolloin $\operatorname{rank}(A) = 1$ ja dimensiolauseen perusteella saadaan $\dim(\mathcal{N}(A)) = 3 - \operatorname{rank}(A) = 3 - 1 = 2$. Jos taas $a \neq 2$, ovat sarakkeet 1 ja 2 lineaarisesti riippumattomat. Tällöin $\operatorname{rank}(A) = 2$ ja dimensiolauseen perusteella saadaan $\dim(\mathcal{N}(A)) = 3 - \operatorname{rank}(A) = 3 - 2 = 1$.

4. (a) Ovatko seuraavat väitteet oikein vai väärin? Perustele vastauksesi lyhyesti.

(i) Jos $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on kolmiomatriisi diagonaalialkioinaan $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, niin $\sigma(A) = \{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$.
Väite on tosi, sillä myös matriisi $A - \lambda I$ on kolmiomatriisi, jonka determinantti saadaan laskettua diagonaalialkioiden tulona. Tällöin matrisiin A karakteristiseksi polynomiksi saadaan $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$, eli ominaisarvoiksi saadaan matriisin A diagonaalialkiot sellaisenaan.

(ii) Jos matriisilla $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ on kaksi erisuurta ominaisarvoa, niin matriisilla A voi olla korkeintaan kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, yksi kumpaakin ominaisarvoa kohti. *Väite on epätosi. Kumpaakin ominaisarvoa vastaa vähintään yksi lineaarisesti riippumaton ominaisvektori, mutta algebrallista kertalukua kaksi olevaa ominaisarvoa voi vastata myös kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Esimerkiksi matriisilla* $\operatorname{diag}(2, 2, 3)$ *on kolme ominaisvektoria $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ ja $\boldsymbol{e}_3$, joista kaksi ensimmäistä vastaavat ominaisarvoa* 2 *ja kolmas ominaisarvoa* 3.

(iii) Jos neliömatriisin A kaikki alkiot ovat reaalisia, niin on silti mahdollista, että matriisilla A on täsmälleen yksi kompleksinen ominaisarvo $\lambda = a + ib$, missä $b \neq 0$.
Väite on epätosi. Jos matriisin A kaikki alkiot ovat reaalisia, niin tällöin myös sen karakteristiselle polynomille tulee pelkästään reaalisia kertoimia. Tällaisessa tilanteessa kompleksiluku $\lambda = a + ib$ on karakteristisen polynomin juuri, jos ja vain jos sen liittoluku $\lambda = a - ib$ on myös sen juuri. Kompleksiset ominaisarvot esiintyvät siis aina liittolukupareittain.

(b) Tehtävänä on etsiä kaikki mahdolliset muuttujan k arvot, joilla matriisista

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & k \\ k & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

tulee projektorimatriisi ja määrittää vektorin $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ projektio kussakin tapauksessa. Projektorimatriisin tulee toteuttaa ehto

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & k \\ k & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + k^2 & k \\ k & \frac{1}{4} + k^2 \end{bmatrix}.$$

Yhtälö toteutuu ainoastaan, kun $k^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, mistä saadaan ratkaistua $k = \pm\frac{1}{2}$. Ensimmäisessä tapauksessa vektorin $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ projektioksi saadaan

$$P\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eli vektori kuvautuu itselleen. Jälkimmäisessä tapauksessa vektorin $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ projektioksi saadaan

$$P\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

eli vektori kuvautuu nollavektoriksi. Molemmat projektiomatriisit toteuttavat ehdon $P^T = P$, joten kumpikin niistä on ortogonaaliprojektorimatriisi.