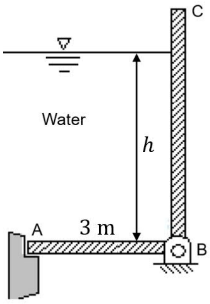
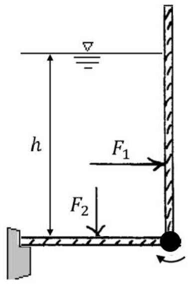
Tampereen yliopisto
YEB.031 HYDROMEKANIIKKA
Välikoe 1, 20.10.2022, ratkaisut

1. Vesisäiliössä on kuvan mukainen L-muotoinen luukku (ABC), joka on saranoitu kohdasta B. Luukun osan AB pituus on 3 m. Kun veden pinta nousee tarpeeksi korkealle, eli kun h tulee tarpeeksi suureksi, luukku alkaa aueta. Määritä korkeuden h arvo, jolla luukun aukeaminen alkaa. Luukun leveys (eli dimensio kohtisuorassa suunnassa) on kauttaaltaan 2 m. Vedelle tiheys $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.





Määritetään voimat leveysmetriä kohden:

$$F_1' = \rho g \frac{h}{2} h = \frac{\rho g h^2}{2}$$

$$F_2' = 3\rho g h$$

Voimalle F_2 vaikutuspiste on pinnan AB keskipisteessä, koska koko pinnalla vaikuttaa sama voima (pinnan jokainen kohta on samalla etäisyydellä ($= h$) nestepinnasta).

Vaikutuspisteen etäisyys nestepinnasta voimalle F_1:

$$y_{R1} = \frac{1}{F_1}\int_A y\, p\, dA$$

$$\rightarrow\ y_{R1} = \frac{1}{F_1'}\int_{y_1}^{y_2} y\, \rho g y \sin\theta\ dy = \frac{1}{F_1'}\rho g \sin\theta \int_{y_1}^{y_2} y^2 dy = \frac{1}{F_1'}\rho g \sin\theta \left(\frac{y_2^3 - y_1^3}{3}\right)$$

$$\theta = 90° \rightarrow \sin\theta = 1;\ y_1 = 0;\ y_2 = h;\ F_1' = \rho g h^2/2$$

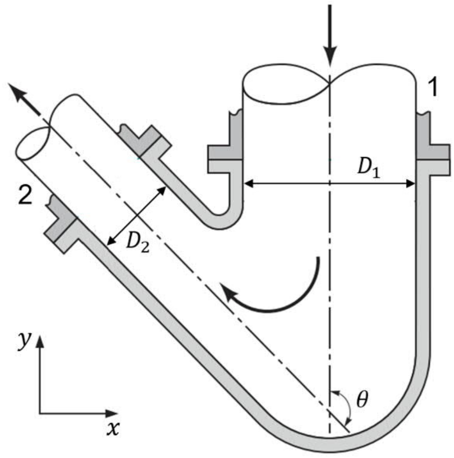
$$\rightarrow\ y_{R1} = \frac{2}{\rho g h^2}\rho g \left(\frac{h^3 - 0}{3}\right) = \frac{2h}{3}$$

$\rightarrow$ Etäisyys vaikutuspisteestä saranaan $= h - 2h/3 = h/3$

$$\Sigma M_{\mathrm{Sarana}} = 0\ \rightarrow\ \frac{\rho g h^2}{2}\cdot\frac{h}{3} - 3\rho g h \cdot 1.5 = 0$$

$$\rightarrow\ h^2 = 27\ \rightarrow\ h = \sqrt{27} = 5.2\ \mathrm{m}$$

2. Vettä virtaa 0.3 m^3/s kuvan mukaisen putki-mutkan läpi. Vesi purkautuu ympäristön paineeseen kohdassa 2. Putken halkaisija sisäänvirtauksessa $D_1 = 300$ mm ja ulosvir-tauksessa $D_2 = 160$ mm. Sisään- ja ulosvirtaus-reuna ovat samassa tasossa ($z_1 = z_2$). Määritä paine-ero $p_1 - p_2$ sekä tukivoiman x- ja y-suuntaiset komponentit, jotka tarvitaan pitämään putkimutka paikoillaan (kerro myös, ovatko voimakomponenttien suunnat x- ja y- akselien positiiviseen vai negatiiviseen suuntaan). Kuvassa annettu kulma θ on 140°. Oleta kitkaton virtaus. Vedelle $\rho = 1000$ kg/m^3.



$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot (0.3)^2}{4} = 0.07069 \text{ m}^2$$

$$\rightarrow\ V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.3}{0.07069} = 4.244 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow\ V_2 = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 V_1 = \left(\frac{300}{160}\right)^2 \cdot 4.244 = 14.92 \text{ m/s}$$

Bernoullin yhtälö:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad (z_1 = z_2)$$

$$\rightarrow\ p_1 - p_2 = \rho\left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}\right) = 1000 \cdot \left[\frac{(14.92)^2 - (4.244)^2}{2}\right] = 102300 \text{ Pa}$$

Määritetään voimakomponentit liikeyhtälöistä (operoidaan ylipaineilla: $p_1 = 102300$ Pa; $p_2 = 0$).

Liikeyhtälö x-suunnassa:

$$\Sigma \bar{F}_x = \dot{m}(\bar{V}_{2x} - \bar{V}_{1x}) \qquad (\bar{V}_{2x} = -V_2 \sin(40) = -9.590 \text{ m/s};\ \bar{V}_{1x} = 0)$$

$$\rightarrow\ \bar{F}_{Rx} = \dot{m}(\bar{V}_{2x} - \bar{V}_{1x}) = 300 \cdot (-9.590 - 0) = -2877 \text{ N} \qquad (\dot{m} = \rho Q = 1000 \cdot 0.3 = 300 \text{ kg/s})$$

Liikeyhtälö y-suunnassa:

$$\Sigma \bar{F}_y = \dot{m}(\bar{V}_{2y} - \bar{V}_{1y}) \qquad \left(\bar{V}_{2y} = V_2 \cos(40) = 11.429 \text{ m/s};\ \bar{V}_{1y} = -V_1 = -4.244 \text{ m/s}\right)$$

$$\rightarrow\ \bar{F}_{Ry} - p_1 A_1 = \dot{m}\left(\bar{V}_{2y} - \bar{V}_{1y}\right)$$

$$\rightarrow\ \bar{F}_{Ry} = p_1 A_1 + \dot{m}\left(\bar{V}_{2y} - \bar{V}_{1y}\right) = 102300 \cdot 0.07069 + 300 \cdot (11.429 - (-4.244)) = 11933 \text{ N}$$

$\bar{F}_{Rx}$ on x-akselin negatiiviseen suuntaan ja $\bar{F}_{Ry}$ on y-akselin positiiviseen suuntaan.

3. Vaakasuorassa sileässä putkessa, halkaisija 65 mm, virtaa vettä 5 kg/s. Virtaus on turbulentti ja täysin kehittynyt. Vedelle $\mu = 0.001$ Pa s ja $\rho = 1000$ kg/m^3.

   (a) Määritä virtausnopeus putken keskiviivalla.

   (b) Määritä viskoosin alakerroksen paksuus.

(a)

$$V = \frac{\dot{m}}{\rho A} = \frac{\dot{m}}{\rho\, \pi D^2/4} = \frac{5}{1000 \cdot \pi \cdot (0.065)^2/4} = 1.507 \text{ m/s}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\nu} = \frac{1000 \cdot 1.507 \cdot 0.065}{0.001} \approx 98000$$

Käytetään potenttilakia:

$$u(r) = V_c \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}$$

Kaavakokoelman käyrästöstä voidaan lukea, että kun Re $\approx 100000 \rightarrow n \approx 7$

Potenssilain kohdalla keskiviivan nopeuden, V_c, ja keskinopeuden, V, välillä on yhteys:

$$\frac{V_c}{V} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2} = \frac{(7+1)(2 \cdot 7 + 1)}{2 \cdot (7)^2} = 1.224 \;\rightarrow\; V_c = 1.224 \cdot 1.507 = 1.845 \text{ m/s}$$

(b)

$$f = \frac{0.3164}{\text{Re}^{0.25}} = \frac{0.3164}{(98000)^{0.25}} = 0.0179$$

$$\frac{\Delta p}{L} = f \frac{\rho V^2}{2} \frac{1}{D} = 0.0179 \cdot \frac{1000 \cdot (1.507)^2}{2} \cdot \frac{1}{0.065} = 312.7 \text{ Pa/m}$$

$$\tau_s = \frac{\Delta p}{L} \frac{R}{2} = 312.7 \cdot \frac{\left(\frac{0.065}{2}\right)}{2} = 5.08 \text{ Pa}$$

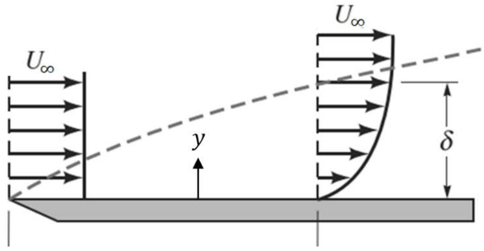
$$u^* = \sqrt{\tau_s/\rho} = \sqrt{5.08/1000} = 0.0713 \text{ m/s}$$

Viskoosi alakerros: $\dfrac{u^* y}{\nu} < 5$

Määritetään y kohdassa $\dfrac{u^* y}{\nu} = 5$:

$$y = \frac{5\nu}{u^*} = \frac{5\mu}{\rho u^*} = \frac{5 \cdot 0.001}{1000 \cdot 0.0713} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 0.07 \text{ mm}$$

4. Ilmaa virtaa ohuen tasolevyn ohi nopeudella $U_\infty = 12$ m/s. Tietyssä kohdassa x rajakerroksen paksuus on 5 mm. Oleta laminaari virtaus.



   (a) Määritä x. Osoita myös, että oletus laminaarista virtauksesta on perusteltu tässä kohdassa.

   (b) Määritä kyseisessä kohdassa x myös nopeuden u arvo 1 mm:n etäisyydellä levyn pinnasta ($y = 1$ mm) sekä derivaatan $\partial u/\partial y$ arvo levyn pinnalla ($y = 0$).

   Ilmalle $\nu = 1.7 \cdot 10^{-5}$ m²/s ja $\rho = 1.12$ kg/m³.

(a)

$$\delta = 5x\,\mathrm{Re}_x^{-1/2} = 5x\left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/2} = 5x^{1/2}\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{-1/2}$$

$$\rightarrow\ x^{1/2} = \frac{\delta\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{1/2}}{5}$$

$$\rightarrow\ x = \left(\frac{\delta}{5}\right)^2\frac{U_\infty}{\nu} = \left(\frac{0.005}{5}\right)^2\cdot\frac{12}{1.7\cdot 10^{-5}} = 0.706\ \text{m}$$

$$\mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu} = \frac{12\cdot 0.706}{1.7\cdot 10^{-5}} = 498350 < \mathrm{Re}_{cr}\ \ (= 500000)$$

(b)

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_\infty}} = \frac{0.001}{\sqrt{1.7\cdot 10^{-5}\cdot 0.706/12}} = 1\ \rightarrow\ f' = \frac{u}{U_\infty} = 0.33\ \rightarrow\ u = 0.33\cdot 12 = 3.96\ \text{m/s}$$

$$c_{fx} = \frac{\tau_s}{\frac{\rho U_\infty^2}{2}} = 0.664\cdot(498350)^{-1/2} = 0.00094$$

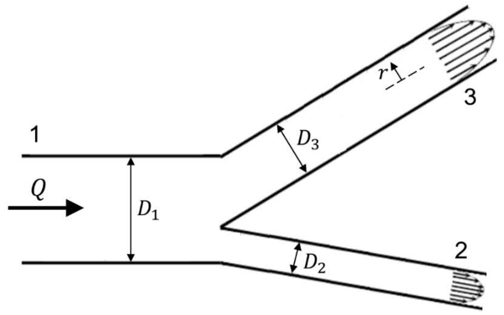
$$\tau_s = c_{fx}\frac{\rho U_\infty^2}{2} = 0.00094\cdot\frac{1.12\cdot(12)^2}{2} = 0.0758\ \text{Pa}$$

$$\tau_s = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}\ \rightarrow\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\tau_s}{\mu} = \frac{\tau_s}{\rho\nu} = \frac{0.0758}{1.12\cdot 1.7\cdot 10^{-5}} = 3981\ \text{Pa}$$

Lähes saman tuloksen paljon helpommin saa olettamalla nopeudelle lineaarisen muutoksen levyn pinnalta ($y = 0, u = 0$) kohtaan $y = 1$ mm $= 0.001$ m. Tällä tavalla derivaataksi saadaan:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \approx \frac{3.96 - 0}{0.001 - 0} = 3960\ \text{Pa}\qquad \text{(tästä sai myös täydet pisteet)}$$

5. Kuvan mukaisessa tapauksessa virtaus haarautuu kahteen putkeen; putkien halkaisijat ovat: $D_1 = 70$ mm, $D_2 = 25$ mm ja $D_3 = 40$ mm. Tilavuusvirta sisäänvirtauksessa (kohta 1) on 0.25 m^3/min. Kohdissa 2 ja 3 virtaus on laminaari ja täysin kehittynyt. Kohdassa 2 virtauksen maksiminopeus (eli nopeus putken keskiviivalla) on 4.5 m/s. Määritä:



(a) Tilavuusvirta kohdassa 2.

(b) Nopeusjakauma kohdassa 3 lausuttuna säteen suuntaisen koordinaatin r avulla.

(c) Leikkausjännitys putken seinällä kohdassa 3.

Virtaavan nesteen viskositeetti $\mu = 0.05$ Ns/m^2 ja tiheys $\rho = 900$ kg/m^3.

(a)

Täysin kehittyneessä laminaarissa putkivirtauksessa keskinopeus $V = V_c/2$.

$$\rightarrow V_2 = \frac{4.5}{2} = 2.25 \text{ m/s} \rightarrow Q_2 = V_2 A_2 = V_2 \frac{\pi D_2^2}{4} = 2.25 \cdot \frac{\pi \cdot (0.025)^2}{4} = 0.001104 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b)

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$\rightarrow Q_3 = Q_1 - Q_2 = \frac{0.25}{60} - 0.001104 = 0.003063 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\rightarrow V_3 = \frac{Q_3}{A_3} = \frac{Q_3}{\pi D_3^2/4} = \frac{0.003063}{\pi \cdot (0.04)^2/4} = 2.437 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow u_3(r) = 2V_3 \left[1 - \left(\frac{r}{R_3}\right)^2\right] = 2 \cdot 2.437 \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{0.02}\right)^2\right] = 4.874 \cdot \left[1 - \left(\frac{r}{0.02}\right)^2\right] = 4.874 - 12185\, r^2$$

(c)

$$\tau_s = \mu \left[\frac{du}{dy}\right]_{r=R} = \mu\,(2 \cdot 12185 \cdot R) = 0.05 \cdot 24370 \cdot 0.02 = 24.37 \text{ Pa}$$

τ_s:n voi määrittää myös näin:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{128\mu}{\pi D^4} Q = \frac{128 \cdot 0.05}{\pi \cdot (0.04)^4} \cdot 0.003063 = 2437 \text{ Pa/m}$$

$$\rightarrow \tau_s = \frac{\Delta p}{L}\frac{R}{2} = 2437 \cdot \frac{0.02}{2} = 24.37 \text{ Pa}$$