73040 Vektorianalyysi	K, Te, Tu, M, R, Y, Tj/Kauhanen
Loppukoe 11.4.2005	S, Au, Ti, Tle/Perttula

Ei omia taulukoita, kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta. Kirjoita vastauspapereihin nimesi, opiskelijanumerosi ja opintosuuntasi.

1. Laske funktion $\mathbf{F} = (3x^2 + y)\,\mathbf{i} + (2x^2 + y^3)\,\mathbf{j}$ käyräintegraali yli tasojoukon $x^2 + y^2 \leq a^2$ vastapäivään suunnistetun reunakäyrän.

2. Pallosta $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ leikataan pois sylinterijoukko $x^2 + y^2 < a^2$. Laske näin muodostuvan joukon

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, \ x^2 + y^2 \geq a^2\}$$

tilavuus.

3. Laske kentän $\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}$ vuo parabolisen sylinteripinnan

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = x^2, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq z \leq 4\}$$

läpi pinnan koveralta puolelta kuperalle puolelle (ts. xz-tason puolelle).

4. Laske kentän $\mathbf{F} = (e^x - y^3, \, e^y + x^3, \, e^z)$ käyräintegraali pitkin käyrää $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \, \sin t, \, 2\cos t \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Ohjeita: Käytä Stokesin lausetta. Huomaa, että käyrä on sekä pinnalla $z = 2xy$ että pinnalla $x^2 + y^2 = 1$.

5. Seuraavissa tutki, onko vektorikentällä $\mathbf{F}$ skalaaripotentiaali $\mathbb{R}^3$:ssa, ja jos on, niin määritä se:

   a) $\mathbf{F} = z^2\,\mathbf{i} + x^3 z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$

   b) $\mathbf{F} = (4xy - 3x^2z^2 + 1)\,\mathbf{i} + 2x^2\,\mathbf{j} - (2x^3 z + 3z^2)\,\mathbf{k}$