73040 Vektorianalyysi	K, Te, Tu, M, R, Y, Tj/Kauhanen
Loppukoe 24.1.2005	S, Au, Ti, Tle/Perttula

Ei omia taulukoita, kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskinta. Kirjoita vastauspapereihin nimesi, opiskelijanumerosi ja opintosuuntasi.

1. Olkoon
$$A = \{(x, y) : x \geq 1,\ 0 \leq y \leq x\}.$$
Laske arvo tai osoita hajaantuminen epäoleelliselle integraalille
$$\iint_A \frac{e^{-y/x}}{x^3}\, dx\, dy.$$

2. Olkoon $R \subset \mathbb{R}^3$ kappale, joka saadaan poistamalla pallosta $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ kartiopinnan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ yläpuolella olevat pisteet, ts.
$$R = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$
Laske kentän $\mathbf{F} = (e^y,\ x + z^3,\ z^2 - 8)$ vuo kappaleen R reunan läpi kappaleesta poispäin.

3. Olkoon S se pinnan $x^2 + y^2 = 3$ osa, jolle $y \geq 0$ ja $0 \leq z \leq 1$.
a) Määritä pinnalle S jokin parametriesitys ja yksikkönormaali.
b) Laske
$$\iint_S y\, d\sigma.$$

4. Olkoon $\mathbf{F} = r^3\mathbf{r}$, missä $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $r = \|\mathbf{r}\|$.
a) Onko vektorikentällä $\mathbf{F}$ skalaaripotentiaalia $\mathbb{R}^3$:ssa? Entä vektoripotentiaalia? Ohje: voit halutessasi käyttää tietoa $\nabla f(r) = f'(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.
b) Laske $\mathbf{F}$:n skalaaripotentiaali, jos se on olemassa. Laske myös $\mathbf{F}$:n jokin vektoripotentiaali, jos sellaisia on olemassa.

5. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}$ käyräintegraali pisteestä $(2, 0, 0)$ pisteeseen $(0, 2, \pi/2)$
a) pitkin pisteet yhdistävää janaa,
b) pitkin ruuvikäyrää $\mathbf{r}(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ t)$.