

Ei omia taulukoita, kirjallisuutta, muistiinpanoja eikä laskimia.
Tentin mukana saat kaavakokoelman.

Vastaa kysymyksiin erilliselle paperille. Laske 1. tehtävä sivulle 1, 2. tehtävä sivulle 2 jne. Laita jokaiseen vastauspaperiin nimesi, opiskelijanumerosi sekä koulutusohjelmasi.

1. Laske putken

$$P = \{(x, y, z) : 8 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 10\}$$

massa, kun massatiheys on $\rho(x, y, z) = z$

6p

2. Laske käyräintegraalin

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

arvo, kun $\underline{F} = (2xy, 2x^2)$ ja joukko R on suoran $x=y$ ja käyrän $y=x^2-x$ rajoittama xy -tason joukko sekä ∂R on joukon positiivisesti suunnistettu yksinkertainen reuna.

a) Suoraan käyräintegraalina

4p

b) Käyttämällä Greenen lausetta

2p

3. Määritä työ, joka tulee tehdyksi liikuttaessa kappaletta kerran xy -tasossa olevan origokeskisen ellipsin ympäri, jonka puoliakselit ovat 4 ja 3, kun vaikuttava voimakenttä on:

$$\underline{F} = (3x - 4y + 2z)\underline{i} + (4x + 2y - 3z^2)\underline{j} + (2xz - 4y^2 + z^3)\underline{k}$$

Käytä ratkaisussasi hyväksi Stokesin kaavaa.

Vihje: Ellipsin pinta-ala on πab

6p

4. a) Olkoon pinnan parametriesitys:

$$\underline{r}(u, v) = (3\cos u + 1, 3\sin u + 2, v) \quad 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v \leq 5$$

Piirrä tai kuvaile kyseinen pinta. Laske pinnan normaali

2p

b) Laske vektorikentän $\underline{F} = xz\underline{i} + z\underline{j} - y^2\underline{k}$ vuo kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja tason $z=1$ rajoittaman kappaleen pinnan läpi.

4p

5. Olkoon vektorikenttä $\underline{F}(\underline{r}) = \underline{r} + \underline{a}$ missä $\underline{r} = (x, y, z)$ ja \underline{a} on vakiovektori.

a) Osoita, että \underline{F} on pyörteetön alueessa \mathbb{R}^3 .

2p

b) Määritä eräs skalaaripotentiali

2p

c) Kuinka suuren työn vektorikenttä suorittaa (tai sitä vastaan suoritetaan), kun kappaletta liikutetaan voimakentässä \underline{F} origosta pisteeseen $\underline{r}_0 = (2, 0, 0)$.

2p