73040 VEKTORIANALYYSI (K,Te,Tu,M,R,Tj,Y)

2. VÄLITENTTI 13.12.2001

Vastaa erilliselle paperille. Laske 1. tehtävä sivulle 1, 2. tehtävä sivulle 2 jne. Laita jokaiseen vastauspaperiin nimesi, opiskelijanumerosi, koulutusohjelmasi. Palauta kaavakokoelma, kysymyspaperin saat pitää.

Kurssin tulokset ovat ilmoitustaululla ja verkossa kurssin kotisivulla http://matriisi.ee.tut.fi/~vattulai/73040.html viimeistään tiistaina 18.12 klo 12.00.

---

1. Joukko
$R = \{(\rho\sin(\phi)\cos(\theta), \rho\sin(\phi)\sin(\theta), \rho\cos(\phi)) \; : \; 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \phi \le \pi, \quad 0 \le \theta < 2\pi\}$
on origokeskinen yksikköpallo**kappale** avaruudessa $\mathbf{R}^3$.
a) Kun kulma ϕ asetetaan vakioksi $\phi = \pi/4$, saadaan eräs pinta, mikä? Piirrä tai kuvaile muulla tavoin.
b) Määritä a)- kohdan pinnan normaali.
c) Mikä on a)-kohdan pinnan pinta-ala? (Laske käyttäen monisteen menetelmää, vaikka tietäisitkin pinta-alan kaavan.)

2. Laske vektorikentän $\mathbf{F} = (x + y^2, 3x + 2y, 2z)$ vuo

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, d\sigma$$

läpi pinnan $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, \; 0 \le z \le 3\}$ käyttäen Gaussin lausetta. $\mathbf{n}$ on pinnalta 'ulospäin' osoittava yksikkönormaali. Huomaa, että pinta ei ole umpinainen.

3. Olkoon vektorikenttä $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \mathbf{a}$, missä $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ja $\mathbf{a}$ on vakiovektori.
a) Osoita, että $\mathbf{F}$ on pyörteetön alueessa $\mathbf{R}^3$.
b) Määritä eräs skalaaripotentiaali.
c) Olkoon piste $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ sellainen 2-säteisen pallonkuoren piste, jossa $\mathbf{r_0} \bullet \mathbf{a} = 0$. Kuinka suuren työn vektorikenttä suorittaa (tai sitä vastaan suoritetaan), kun kappaletta liikutetaan voimakentässä $\mathbf{F}$ origosta pisteeseen $\mathbf{r_0}$?