73035 INSINÖÖRIMATEMATIIKKA 2
K,Te,Tu/Pirttimäki
Tentti 14.5.2003

Ei laskimia, taulukot jaetaan. Välitenttisuoritusta ei voi parantaa.

Tentti tehtävät 1–5
1 vt tehtävä 1 ja lisätehtävä 1
2 vt tehtävät 2 ja 3
3 vt tehtävät 4 ja 5i
4 vt tehtävät 5ii ja lisätehtävä 2

1. Laske sen kappaleen tilavuus, jonka pohjana xy-tasossa on origokeskisen yksikköympyrän ja 2-säteisen origokeskisen ympyrän rajoittama alue jolle $x > 0$ ja $y > 0$. Yläpinta on $z = \dfrac{1}{x^2+1+y^2}$.

2. (i) Laske A:n käänteismatriisi, kun

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(ii) Millä vakion k arvoilla yhtälöryhmällä on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\begin{cases} x & & + & kz & = & -1 \\ x & + \; y & + & kz & = & 1 \\ x & + \; y & + & k^2 z & = & k \end{cases}$$

3. (i) Olkoon aliavaruus

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 2z = 0\right\}$$

Etsi H:lle kanta.

(ii) Matriisi A toteuttaa ehdot $A^2 = -A$ ja $A \neq 0$. Määritä luku p siten,että $I + pA$ on matriisin $I - \frac{1}{3}A$ käänteismatriisi.

4. Etsi A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2

5. (i) Funktiolle $\tan x$ on muodostettu Taylorin polynomi kehityskeskukseen $\frac{\pi}{4}$ (polynomia ei tarvitse muodostaa!) Mikä on polynomin asteluku kun arvioit lukua $\tan\left(\frac{\pi}{4} - 0.1\right)$ ja virheen pitää olla itseisarvoltaan pienempi kuin 0.01.

Ohje: $D \tan x = 1 + \tan^2 x$ $\quad R_n(x) = f^{(n+1)}(c)\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

(ii) Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y' - \frac{3}{x}y = x^3 \sin x, \quad y(\pi) = \pi^3 + 1$$

Lisätehtävä 1.
Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ 7x + 8y - z = 6 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

Lisätehtävä 2.
(i) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 2y' = x^2 - 1.$$

(ii) Ratkaise

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 5x + 4y \end{cases}$$

1 · 2 · 3 · 4

InsMat2 / Differentiaaliyhtälöihin vihjeitä

1. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x)$$

$$y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)\,e^{A(x)}\,dx + C\right), \quad \text{missä} \quad A(x) = \int a(x)\,dx$$

2. $$\hat{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\,h$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})\right)h$$

3. $$y_{i+1} = y_i + k\,h, \quad k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_i + h, y_i + h\,k_3)$$

4. $$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \ldots, \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

5. $$y(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\,y_1(x) + c_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

6. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{ja} \quad \cos\phi = \frac{b}{A}, \ \sin\phi = \frac{a}{A} \quad \text{eli} \quad \phi = \arctan\frac{a}{b} \ (\pm\pi)$$

7. $$f(x) = c\,e^{\alpha x}$$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1-kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2-kertainen juuri

8. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$

$$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \quad \text{ja} \quad B = \frac{p}{2\omega}$$

9. $$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1\,y' + a_0\,y = 0$$

(i) <u>yksinkertainen reaalijuuri</u> λ_1; ratkaisu

$$e^{\lambda_1 x}$$

(ii) <u>yksinkertainen imaginaarijuuripari</u> $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{ja} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

(iii) <u>k-kertainen reaalijuuri</u> λ_1, ratkaisut

$$e^{\lambda_1 x}, \ x\,e^{\lambda_1 x}, \ x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

(iv) <u>k-kertainen imaginaarijuuripari</u> $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

10. $$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \ \ldots\ldots \ \mathbf{x}(t) = X(t)\,\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \quad \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v} \ \ldots\ldots, \quad \mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}, \ \mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$$

11. $$\mathbf{x}' = A\,\mathbf{x} + e^{\lambda t}\,\mathbf{k} \ \ldots\ldots \ \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\,\mathbf{v} \ \ldots\ldots \ (A - \lambda I)\,\mathbf{v} = -\mathbf{k}$$