

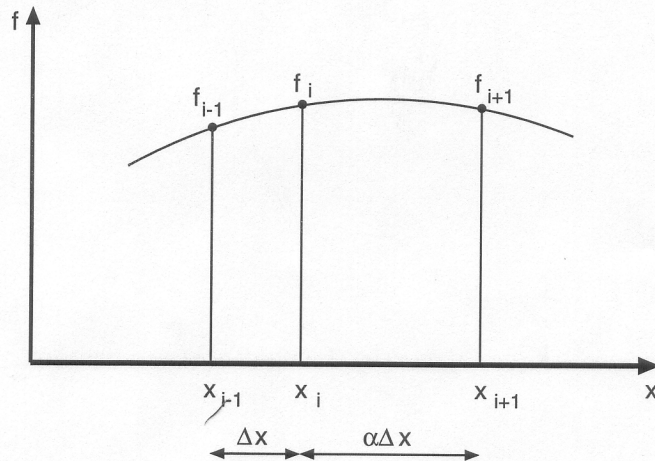
25211 VIRTAUSTEN NUMEERINEN LASKENTA  
Tentti 8.5.2003

*Tentissä saa käyttää kurssikirjaa (Ferziger, J. H. & Perić, M., Computational Methods for Fluid Dynamics) ja luentomonistetta (Ahlstedt, H., Virtausten numeerinen laskenta, luentokalvot, 2/00, 2000 tai vastaava vanhempi moniste). Harjoitustehtäviä ratkaisuihin ja muuta kirjallisuutta ei saa käyttää.*

(5 pist./tehtävä)

1. Selitä seuraavat kohdat (yritä välttää kohtuuttoman pitkiä vastauksia):
  - a) Konvergenssi
  - b) Painegradienttilikiarvon vaikutus säilyvyyteen
  - c) Integraalien arviointi kontrollitilavuuden pinnoilla
  - d) Keskidifferenssin stabiilisuus
  - e) Laskennan lopetuskriteeri
  - f) Aika-askeleen pituus implisiittisessä menetelmässä
  - g) Paineen reunaehdot
  - h) Likiarvon kertaluku
  - i) Ylirelaksaatio
  - j) Yksiulotteisen konvektio-diffuusiotekniikan tulosten soveltuvuus muihin tilanteisiin
  - k) Massiivista rinnakkaislaskentaa rajoittavat tekijät
  - l) Virhetyypit ja niiden arviointi

- 2.a) Etsi toisen kertaluvun etudifferenssilikiarvo  $\partial f/\partial x$  käyttäen Taylorin sarjaa, kun laskentaverkko on kuvan mukaisesti muuttuva.



- b) Tarkastele funktiota  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ . Laske  $f$  ensimmäinen derivaatta kohdassa  $x = 2$  käyttäen ensimmäisen kertaluvun etu- ja takadifferenssiä. Vertaa tuloksia toisen kertaluvun keskidifferenssilikiarvoon ja tarkkaan ratkaisuun. Käytä askelpituutta  $\Delta x = 0,1$ . Toista laskelmat askelpituudella  $0,4$  ja vertaa tuloksia keskenään. Esitä arviot virheiden suuruusluokista.
3. Oheisessa taulukossa on esitetty osa yksiulotteisen differenssilaskennan tuloksista käyttäen toisen kertaluvun menetelmää. Laskenta on tehty verkoilla, joissa on ollut 50, 100 ja 200 pistettä. Arvioi Richardsonin ekstrapoloinnilla kahden tiheimmän laskentaverkon diskreetointivirhettä eri pisteissä. Arvioi korjausten avulla tulosta, jossa laskentaverkon koko  $\rightarrow 0$ .

j	$\phi_{50}$	j	$\phi_{100}$	j	$\phi_{200}$
1	0,5592	1	0,5628	1	0,5607
2	0,5700	3	0,5740	5	0,5726
3	0,5737	5	0,5748	9	0,5745
4	0,5615	7	0,5557	13	0,5573

4. Kuvassa esitetystä alueesta ( $2 \times 2$ ) muuttujan  $\phi$  käyttäytymistä hallitsee yhtälö

$$\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \alpha + \beta \phi$$

missä  $\rho = 1$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\alpha = 20$ ,  $\beta = -10$  ja reunaehdot on esitetty kuvassa. Nopeuskenttä on kaikkialla  $u = 12$  ja  $v = 6$ .

- Käytän kuvan mukaista tasajakoista laskentaverkkoa ja ylävirtadifferenssiä kirjoita yhtälöt, joista voidaan ratkaista muuttujien  $\phi$  arvot pisteissä 1, 2, 3 ja 4 (ei tarvitse ratkaista).
- Miksi keskidifferenssi ei sovellu tehtävän ratkaisemiseen?
- Miten laskentaverkko olisi valittava, jotta voitaisiin käyttää keskidifferenssiä?

