

25105 LÄMPÖTEKNIIKAN MATEMAATTISET APUNEUVOT
Tentti 14.5.2003

Tentissä saa käyttää kurssin luentomonistetta. Harjoitustehtäviä ratkaisuihin ja muuta kirjallisuutta ei saa käyttää.

(5 pist./tehtävä)

1. Tunnetaan yhtälö $\frac{dy}{dx} = x - y^2$ ja alkuehto $y(0) = 0$. Arvioi y arvoilla $x = 0, 2, 4, 6, 8, 1, 0$. Aloita Runge-Kutta menetelmällä ja käytä Adams-Bashforth-kaavaa heti, kun se on mahdollista.

2. Luokittele seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

a)

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 10$$

b)

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \tan x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (\sin x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

c)

$$y^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - 2t^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = yt$$

d)

$$\frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

e)

$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = e^{-3}$$

3. Pitkän (pituus ℓ) sivuilta eristetyin sauvan päiden lämpötilat ovat $T(x=0) = 100^\circ$ ja $T(x=\ell) = 50^\circ$. Hetkellä $t=0$ sauvan lämpötila on 100° . Ratkaise sauvan lämpötilajakautuma.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksella yhtälö

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 20e^{-t}$$

$$y(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt}(0) = 3$$

5. Etsi $f(x) = x^2$, $0 < x \leq 2$ Fourier'n sarja.

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
3. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
4. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
5. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
6. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $
7. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
8. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
9. $t^n \quad n = \text{positive integer}$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
10. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
11. $H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad s > 0$
12. $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
15. $f^{(n)}(t) \quad (n\text{th derivative})$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
16. $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
17. $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
18. $\operatorname{erf}(t/2a)$	$\frac{1}{s} e^{a^2 s^2} \operatorname{erfc}(as)$
19. $\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-as}$
20. $J_0(at)$	$(s^2 + a^2)^{-1/2}$
21. $\delta(t-a)$	e^{-as}
22. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{e^{-as}}{\sqrt{s}} \quad a \geq 0$
23. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$