

25105 LÄMPÖTEKNIIKAN MATEMAATTISET APUNEUVOT
Tentti 15.3.1999

Tentissä saa käyttää kurssin luentomonistetta. Harjoitustehtäviä ratkaisuihin ja muuta kirjallisuutta ei saa käyttää.

(5 pist./tehtävä)

1. Ratkaise numeerisesti sekä eksplisiittisellä että implisiittisellä Adamsin menetelmällä yhtälö $y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$ arvosta $x = 0$ arvoon $x = 4$ käyttäen askelpituutta 1. Kohtaa $x = 0$ ennen olevat arvot voit laskea analyyttisestä ratkaisusta $y = \frac{4}{1,3}(e^{0,8x} - e^{-0,5x}) + 2e^{-0,5x}$. Vertaa tulosten tarkkuutta analyyttiseen ratkaisuun kohdassa $x = 4$.

2. Piirrä seuraavien jaksollisten funktioiden taajuusspektrit:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \cos x + \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 3x + \frac{1}{4} \cos 4x$

c) $f(x) = \sin x + \cos x + 0,5 \sin 3x + 0,2 \cos 5x + 0,1 \sin 7x$

3. Ratkaise tehtävä

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial T(0, z)}{\partial r} = 0$$

$$T(r, 0) = 100^\circ$$

$$T(r, \infty) = 0^\circ$$

muuttujien erottamisella. Ympäristön lämpötila on 50° ja lämmönsiirtokerroin pinnan ($r=R$) ja ympäristön välillä on h .

4. Ratkaise Laplace-muunnoksella yhtälö

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial y}{\partial t} + 2y = e^{-t}$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0) = 0$$

5. Laajenna kuvassa esitetty funktio Fourier'n sarjaksi.

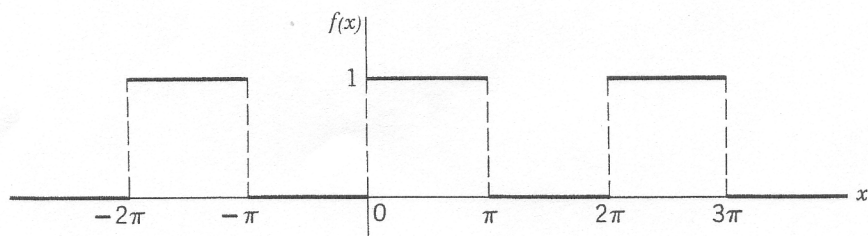


TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
3. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
4. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
5. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
6. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $
7. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
8. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
9. $t^n \quad n = \text{positive integer}$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
10. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
11. $H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad s > 0$
12. $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
15. $f^{(n)}(t) \quad (n\text{th derivative})$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
16. $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
17. $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
18. $\operatorname{erfc}(t/2a)$	$\frac{1}{s} e^{-a^2/s^2} \operatorname{erfc}(as)$
19. $\operatorname{erfc}(at/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
20. $J_0(at)$	$(s^2 + a^2)^{-1/2}$
21. $\delta(t-a)$	e^{-as}
22. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{e^{-as}}{\sqrt{s}} \quad a \geq 0$
23. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$