

25105 LÄMPÖTEKNIIKAN MATEMAATTISET APUNEUVOT
Tentti 11.1.1999

Tentissä saa käyttää kurssin luentomonistetta. Harjoitustehtäviä ratkaisuihin ja muuta kirjallisuutta ei saa käyttää.

(5 pist./tehtävä)

1. Luokittele seuraavat osittaisdifferentiaaliyhtälöt:

a)

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

b)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\cos x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos x) \frac{\partial u}{\partial y}$$

c)

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$$

d)

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e)

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = e^{-2}$$

2. Piirrä seuraavien jaksollisten funktioiden taajuusspektrit:

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \sin x + \cos 2x + \frac{1}{5} \cos 3x$

c) $f(x) = \sin x + \cos x + 0,5 \sin 3x$

3. Ratkaise tehtävä

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(0, y) = f(y)$$

$$T(x, \pm l) = 0$$

$$T(\infty, y) = 0$$

muuttujien erottamisella.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksella yhtälö

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial y}{\partial t} + y = 1,$$

$$y(0) = 2$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0) = -2$$

5. Käytä implisiittistä differenssimenetelmää pitkän, ohuen sauvan lämpötilajakautuman laskemiseksi. Sauvan pituus on 10 ja $\kappa = 1$. Hetkellä $t = 0$ sauvan lämpötila on 0° ja reunaehdot ovat koko ajan $T(x = 0) = 40^\circ$ ja $T(x = 10) = 20^\circ$. Ohje: ensimmäisellä aika-askeleella syntynyttä yhtälöryhmää ei tarvitse ratkaista, esitä vain mitenkä toisen aika-askeleen tilanne eroaa ensimmäisestä ja lopeta laskenta siihen.

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
3. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
4. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
5. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
6. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $
7. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
8. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
9. $t^n \quad n = \text{positive integer}$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
10. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
11. $H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad s > 0$
12. $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
15. $f^{(n)}(t) \quad (n\text{th derivative})$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
16. $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
17. $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
18. $\operatorname{erf}(t/2a)$	$\frac{1}{s} e^{a^2 s^2} \operatorname{erfc}(as)$
19. $\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
20. $J_0(at)$	$(s^2 + a^2)^{-1/2}$
21. $\delta(t-a)$	e^{-as}
22. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{e^{-as}}{\sqrt{s}} \quad a \geq 0$
23. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} \operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$