

25105 LÄMPÖTEKNIIKAN MATEMAATTISET APUNEUVOT
Tentti 21.12.1998

Tentissä saa käyttää kurssin luentomonistetta. Harjoitustehtäviä ratkaisuihin ja muuta kirjallisuutta ei saa käyttää.

(5 pist./tehtävä)

1. Määritä yhtälön $-\nabla^2 u(x) = \lambda^2 u(x)$ ominaisarvot alueessa $[0, a]$, kun reunaehtona molemmissa päissä on $\partial u / \partial n = 0$. (Luentomonisteessa s. 83 kaavassa (7) ja s. 84 kaavassa (4) pitäisi olla λ^2 .)
2. Ratkaise seuraava differentiaaliyhtälöryhmä neljännen kertaluvun Runge-Kutta-menetelmällä olettaen, että kohdassa $x = 0$ $y_1 = 4$ ja $y_2 = 6$. Integroi kohtaan $x = 1,5$ askelpituudella $0,5$.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0,5y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0,3y_2 - 0,1y_1$$

3. Ratkaise tehtävä

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$T(0, y) = f(y)$$

$$T(x, \pm l) = 0$$

$$T(\infty, y) = 0$$

muuttujien erottamisella.

4. Ratkaise Laplace-muunnoksella yhtälö

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial y}{\partial t} + 4y = t^2 e^{-2t}$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0) = 0$$

5. Käytä eksplisiittistä differenssimenetelmää pitkän, ohuen sauvan lämpötilajakautuman laskemiseksi. Sauvan pituus on 10 ja $\kappa = 1$. Hetkellä $t = 0$ sauvan lämpötila on 0° ja reunaehdot ovat koko ajan $T(x = 0) = 40^\circ$ ja $T(x = 10) = 20^\circ$. Ohje: jos aika-askelten lukumäärä on suuri, laskentaa ei tarvitse viedä loppuun saakka, riittää, kun esität periaatteet, mitenkä laskenta lopetetaan.

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1. 1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
3. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
4. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
5. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
6. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $
7. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
8. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2} \quad s > a$
9. $t^n \quad n = \text{positive integer}$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
10. $t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
11. $H(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s} \quad s > 0$
12. $H(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
14. $f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$
15. $f^{(n)}(t) \quad (n\text{th derivative})$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
16. $f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0$

TABLE F Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
17. $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
18. $\text{erf}(t/2a)$	$\frac{1}{s} e^{a^2 s^2} \text{erfc}(as)$
19. $\text{erfc}(at/2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$
20. $J_0(at)$	$(s^2 + a^2)^{-1/2}$
21. $\delta(t-a)$	e^{-sa}
22. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{e^{-as}}{\sqrt{s}} \quad a \geq 0$
23. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} \text{erfc}(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{s+a}}$