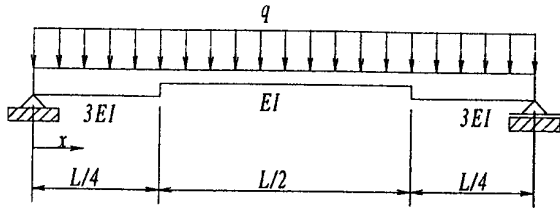
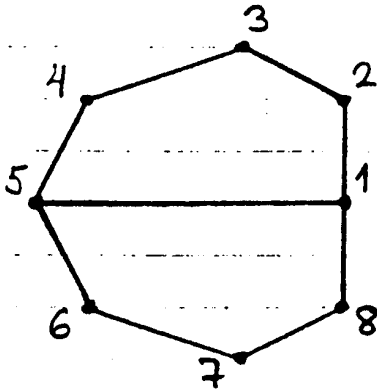


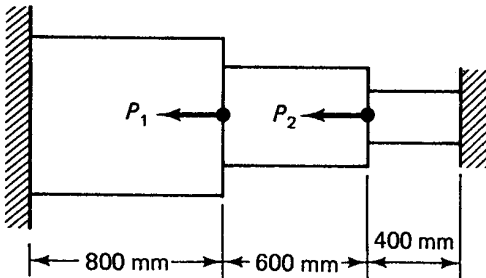
1. välikoe 31.10.2001



1. Määritä kuvan palkin taipumaviivan  $v = v(x)$  sekä keskipisteen taipuman approksimaatiot Rayleigh-Ritzin menetelmällä käyttäen funktiota  $\tilde{v} = C \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ . Kimmoenergian lauseke  $U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx$ .

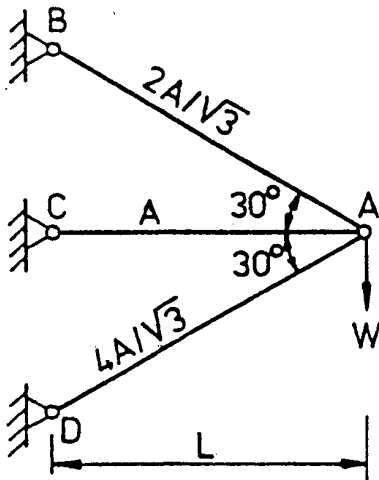


2. Kuva esittää kaksoistasorengasta, joka voidaan mallintaa yhdeksällä palkkielementillä ja kahdeksalla solmulla. Mahdollisia tukia ei ole piirretty kuvaan. Oletetaan, että kullakin solmulla on vain yksi vapausaste. a) Mikä on jäykkymatriisin puolinauhan leveys, kun lävistäjäälkio laskeaan mukaan? b) Esitä jäykkymatriisi periaatekuvana, johon on rastilla merkitty nolasta eroavat alkio. c) Piirrä skylineviiva. d) Esitä sellainen solmunumerointi, että puolinauhan leveys pienenee kohdan a) arvosta.

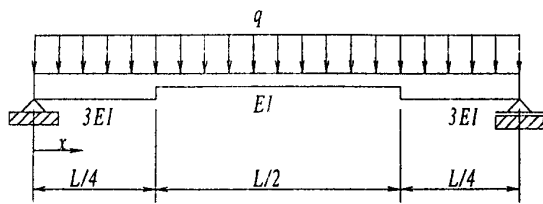


Bronze	Aluminum	Steel
$A = 2400 \text{ mm}^2$	$1200 \text{ mm}^2$	$600 \text{ mm}^2$
$E = 83 \text{ GPa}$	$70 \text{ GPa}$	$200 \text{ GPa}$
$\alpha = 18.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

3. Oheisen kuvan rakenteeseen kohdistuu voimien  $P_1 = 60 \text{ kN}$  ja  $P_2 = 75 \text{ kN}$  lisäksi lämpötilan muutos  $\Delta T = 80 \text{ }^\circ\text{C}$ . Määritä voimien vaikutuspisteiden siirtymät, rakenteen normaali-jännitykset sekä tukireaktiot. Käytä reunaeh-tojen käsittelyssä eliminointimenetelmää.



4. Muodosta oheisen ristikon jäykkymatriisi ja laske nurkan A solmuniirtymät sekä sauvan AB normaali-jännitys.



1. Määritä kuvan palkin taipumaviivan  $v = v(x)$  sekä keskipisteen taipuman approksimaatiot Rayleigh-Ritzin menetelmällä käyttäen funktiota  $\tilde{v} = C \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ . Kimmoenergian lauseke  $U = \frac{1}{2} \int_0^L EI(v'')^2 dx$ .

Ratkaistaan  $\tilde{v}(0) = \tilde{v}(L) = 0 \Rightarrow$  riittävät taivutusfunktiot

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI(\tilde{v}'')^2 dx - \int_0^L q \tilde{v} dx$$

$$\tilde{v}' = C \left( \frac{1}{L} - 2 \frac{x}{L^2} \right) \quad \tilde{v}'' = - \frac{2C}{L^2}$$

$$\pi = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3EI \int_0^{L/4} \frac{4C^2}{L^4} dx + \frac{1}{2} EI \int_{L/4}^{3L/4} \frac{4C^2}{L^4} dx - q \int_0^L C \left( \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2} \right) dx$$

$$\pi = 3EI \frac{C^2}{L^3} + \frac{1}{2} EI \frac{4C^2}{L^4} \frac{L}{2} - qC \left( \frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L \right)$$

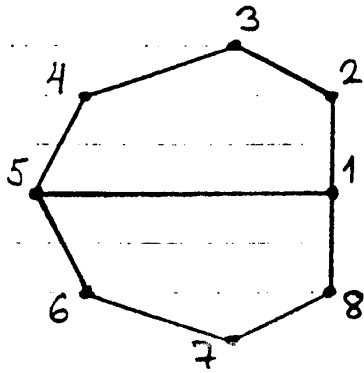
$$\pi = 4EI \frac{C^2}{L^3} - \frac{1}{6} qCL$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial C} = 8 \frac{EI}{L^3} C - \frac{1}{6} qL = 0$$

$$C = \frac{qL^3}{6 \cdot 8EI} = \frac{qL^4}{48EI}$$

$$\tilde{v}(x) = \frac{qL^4}{48EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

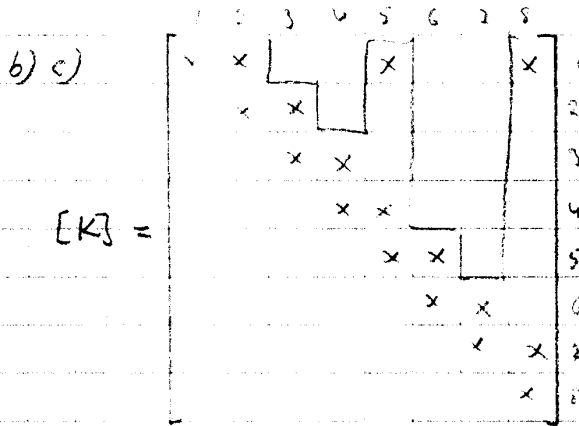
$$\tilde{v}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{48EI} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{qL^4}{192EI}$$



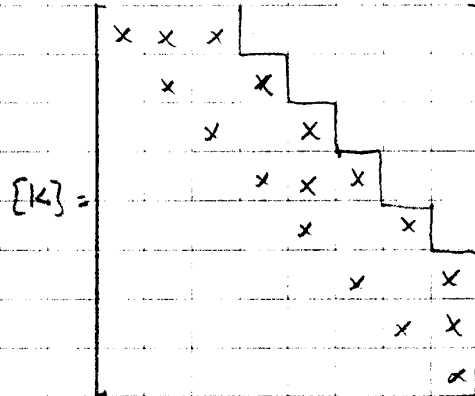
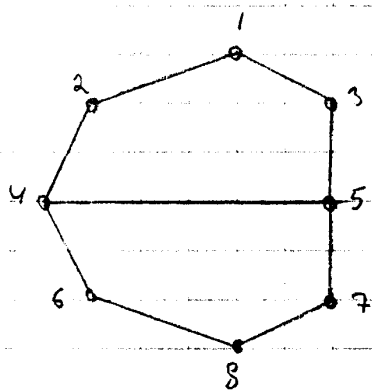
2. Kuva esittää kaksoistasorengasta, joka voidaan mallintaa yhdeksällä palkkielementillä ja kahdeksalla solmulla. Mahdollisia tukia ei ole piirretty kuvaan. Oletetaan, että kullakin solmulla on vain yksi vapausaste. a) Mikä on jäykkymatriisin puolinauhan leveys, kun lävistjäalkio lasketaan mukaan? b) Esitä jäykkymatriisi periaatekuvana, johon on rastilla merkitty nolasta eroavat alkio. c) Piirrä skylineviiva. d) Esitä sellainen solmunumerointi, että puolinauhan leveys pienenee kohdan a) arvosta.

Ratkaisu

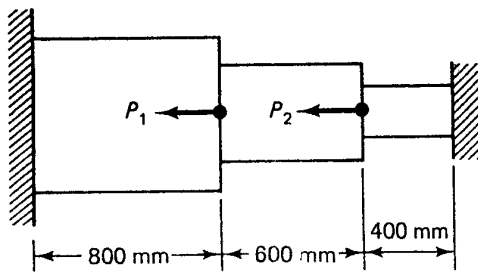
a)  $B = 8$



d)



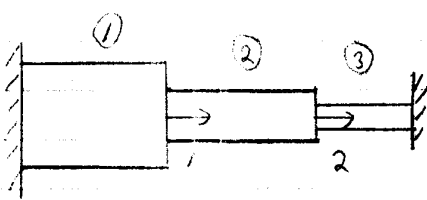
$B = 3$



Bronze	Aluminum	Steel
$A = 2400 \text{ mm}^2$	$1200 \text{ mm}^2$	$600 \text{ mm}^2$
$E = 83 \text{ GPa}$	$70 \text{ GPa}$	$200 \text{ GPa}$
$\alpha = 18.9 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$23 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$	$11.7 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$

3. Oheisen kuvan rakenteeseen kohdistuu voimien  $P_1 = 60 \text{ kN}$  ja  $P_2 = 75 \text{ kN}$  lisäksi lämpötilan muutos  $\Delta T = 80^\circ\text{C}$ . Määritä voimien vaikutuspisteiden siirtymät, rakenteen normaaliännitykset sekä tukireaktiot. Käytä reunaehtojen käsittelyssä eliminointimenetelmää.

Ratkais:  $u, \sigma$  (N, mm, MPa)



$$[k^{(1)}] = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_1$$

$$[k^{(2)}] = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_2$$

$$[k^{(3)}] = \frac{E_3 A_3}{L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_2$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{L_1} + \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} + \frac{E_3 A_3}{L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 389000 & -140000 \\ -140000 & 440000 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} -60000 + E_1 A_1 \alpha_1 \Delta T - E_2 A_2 \alpha_2 \Delta T \\ -75000 + E_2 A_2 \alpha_2 \Delta T - E_3 A_3 \alpha_3 \Delta T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86630,4 \\ -32760 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [K]^{-1} \{F\} = \frac{10^{-3}}{389 \cdot 440 - 140^2} \begin{bmatrix} 440 & 140 \\ 140 & 389 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 86630,4 \\ -32760 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,221 \\ -0,004 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{L_1} [-1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 \end{bmatrix} - E_1 \alpha_1 \Delta T = \underline{\underline{-102,6 \text{ MPa}}}$$

$$\Rightarrow N_1 = \sigma_1 A_1 = \underline{\underline{-246 \text{ kN}}}$$

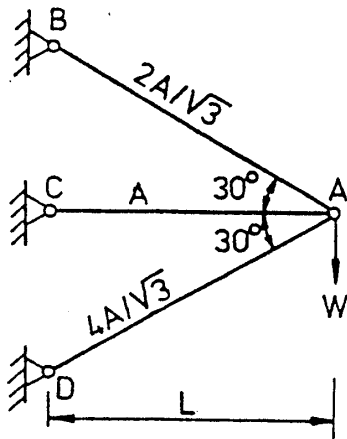
$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{E_2}{L_2} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} - E_2 \alpha_2 \Delta T \\ &= \frac{70000}{600} (-0,221 - 0,004) - 70000 \cdot 23 \cdot 10^{-6} \cdot 80\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = -155 \text{ MPa}}}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \frac{E_3}{L_3} [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} - E_3 \alpha_3 \Delta T \\ &= \frac{200000}{400} \cdot 0,004 - 200000 \cdot 11,7 \cdot 10^{-6} \cdot 80\end{aligned}$$

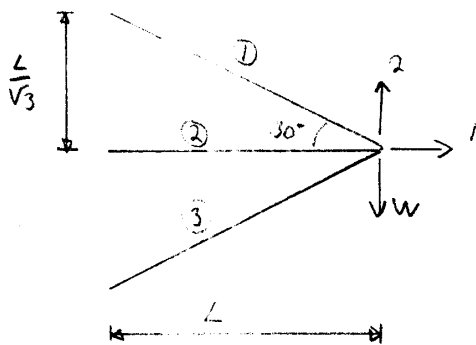
$$\underline{\underline{\sigma_3 = -185 \text{ MPa}}}$$

$$N_3 = \sigma_3 A_3 = \underline{\underline{-111 \text{ kN}}}$$



4. Muodosta oheisen ristikon jäykkymatriisi ja laske nurkan A solmisiirtymät sekä sauvan AB normaaliännitys.

Ratkaisu



$$\alpha_1 = -30^\circ \quad l_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$[k^{(1)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & l_1^2 & l_1 m_1 \\ \times & \times & l_1 m_1 & m_1^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[k^{(2)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \times & \times \\ \times & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\alpha_3 = +30^\circ \quad l_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad m_3 = \frac{1}{2}$$

$$[k^{(3)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & l_3^2 & l_3 m_3 \\ \times & \times & l_3 m_3 & m_3^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} l_1^2 + 1 + 2l_3^2 & l_1 m_1 + 2l_3 m_3 \\ \text{symm} & m_1^2 + 2m_3^2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 13 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -W \end{bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad [K]\{Q\} = \{F\}$$

$$\{Q\} = [K]^{-1} \{F\} = \frac{4WL}{EA} \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{WL}{9EA} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,19 \\ -1,44 \end{bmatrix} \frac{WL}{EA}$$

Solva 2.8

$$\sigma = \frac{E}{2L/\sqrt{3}} [-l_1, -m_1, l_1, m_1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} E}{2L} (l_1 Q_1 + m_1 Q_2)$$

$$= \frac{\sqrt{3} E}{2L} \frac{WL}{9EA} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2} (-13) \right)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{3} W}{18A} \left( \frac{3}{2} + \frac{13}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{W}{A}}} \approx 0,77 \frac{W}{A}$$