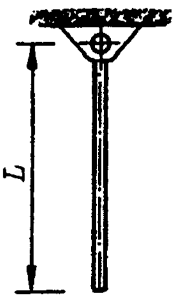
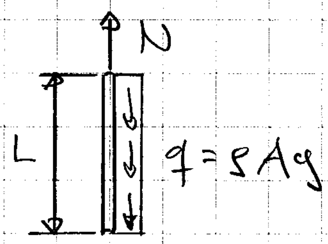


1. Poikkileikkaukseltaan pyöreä ($d = 20$ mm) tasapaksu terässauva ($R_e = 235$ MPa, $\rho = 7850$ kg/m^3, $E = 210$ GPa ja $\nu = 0{,}3$) roikkuu toisesta päästä.

   a) Miten pitkä sauva voi olla ilman, että siihen syntyy pysyviä muodonmuutoksia? Oletetaan, että $\sigma_E \approx R_e$.

   b) Montako prosenttia sauvan poikkipinta-ala pienenee enimmillään a)-kohdan pituudella?

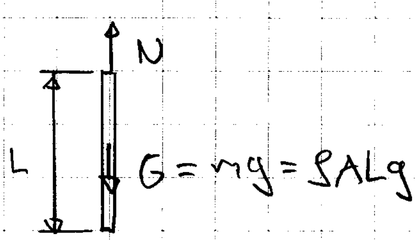
a) Normaalivoima on suurimmillaan yläpäässä.



$$\uparrow \quad N - \rho A g L = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \rho A g L$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{\rho A g L}{A} = \rho g L$$

tai



$$\Rightarrow \quad L = \frac{R_e}{\rho g} = 3051{,}6 \text{ m}$$

b) Yläpäässä normaalijännitys on R_e.

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{R_e}{E}$$

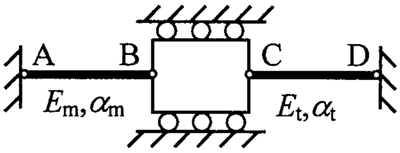
$$\nu = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon} \quad \text{ja} \quad \varepsilon_\perp = \frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d - d_0}{d_0}$$

$$\Rightarrow \quad d = d_0(1 + \varepsilon_\perp) = d_0\left(1 - \nu\frac{R_e}{E}\right)$$

$$A_0 = \frac{\pi}{4}d_0^2 \qquad A = \frac{\pi}{4}d^2$$

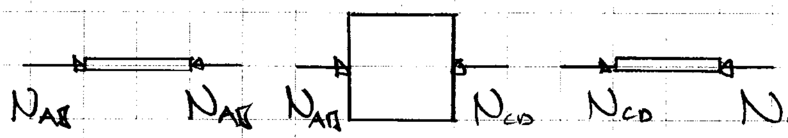
$$\frac{A_0 - A}{A_0} = \frac{\frac{\pi}{4}d_0^2 - \frac{\pi}{4}d_0^2\left(1 - \nu\frac{R_e}{E}\right)^2}{\frac{\pi}{4}d_0^2} = 1 - \left(1 - \nu\frac{R_e}{E}\right)^2 = 6{,}773 \cdot 10^{-4}$$

eli $\underline{\underline{0{,}0677\ \%}}$



2. Vaakasuunnassa liikkuvaan laatikkoon on kiinnitetty pituudeltaan ja poikkileikkaukseltaan samanlaiset ($A = 3{,}0\ \text{cm}^2$ ja $L = 1{,}0\ \text{m}$) messinkisauva AB ja terässauva CD. Paljonko laatikko siirtyy, jos alussa jännityksettömien sauvojen lämpötila nousee 100 °C? Messingille $E_m = 110$ GPa ja $\alpha_m = 20 \cdot 10^{-6}$ 1/°C ja teräkselle $E_t = 210$ GPa ja $\alpha_t = 12 \cdot 10^{-6}$ 1/°C.

Lämpötilan nousu pyrkii pidentämään sauvoja ja aiheuttaa niihin normaalivoiman N.



$\rightarrow \quad N_{AB} - N_{CD} = 0$

$\Rightarrow \quad N_{AB} = N_{CD} = N$

Normaalivoimasta N $\quad \Delta L_m^N = \dfrac{-NL}{E_m A}$ ja $\Delta L_t^N = \dfrac{-NL}{E_t A}$

Lämpötilan noususta ΔT $\quad \Delta L_m^T = \alpha_m L \Delta T$ ja $\Delta L_t^T = \alpha_t L \Delta T$

Messinkisauvan pituuden muutos $\quad \Delta L_m = \Delta L_m^N + \Delta L_m^T$

Teräs " " $\quad \Delta L_t = \Delta L_t^N + \Delta L_t^T$

Kokonaispituus ei muutu eli $\Delta L_m + \Delta L_t = 0$

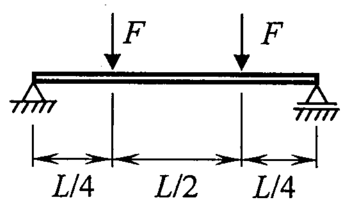
$$\Rightarrow \quad \frac{-NL}{E_m A} + \alpha_m L \Delta T + \frac{-NL}{E_t A} + \alpha_t L \Delta T = 0 \quad \Big| : L$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{\Delta T A (\alpha_m + \alpha_t)}{1/E_m + 1/E_t} = 69\,300\ \text{N}$$

Vaakasiirtymä $|u| = |\Delta L_m| = |\Delta L_t|$

$$\underline{\underline{u}} = \left| \frac{-NL}{E_m A} + \alpha_m L \Delta T \right| = 0{,}0001\ \text{m}$$

$$= \underline{\underline{0{,}1\ \text{mm oikealle}}}$$



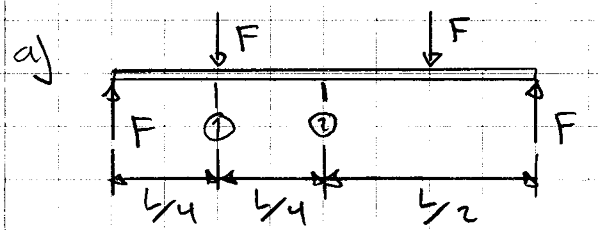
3. Valitse oheisesta taulukosta kuvan palkille kevein mahdollinen IPE-profiili, kun

   a) Varmuusluvuksi myödön suhteen halutaan vähintään 1,5.

   b) Palkin suurin taipuma saa olla enintään 30 mm.

Materiaalina on S355, jolle $E = 205$ GPa. $F = 50$ kN ja $L = 6$ m. Palkin omaa painoa ei huomioida.

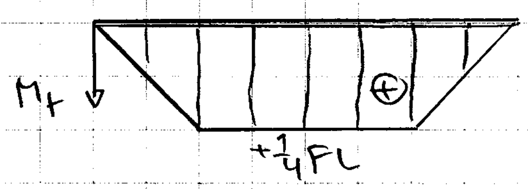
a)



Tukireaktioiden suunnus nähdään symmetrian perusteella.

① $M_t = F\cdot \frac{1}{4}L = \frac{1}{4}FL$

② $M_t = F\cdot \frac{1}{2}L - F\cdot\frac{1}{4}L = \frac{1}{4}FL$



$|M_t|_{max} = \frac{1}{4}FL$

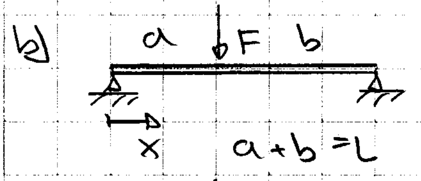
S355 (Re = 355 MPa)
$n = 1{,}5$

$\Rightarrow \quad \sigma_{sall} = \frac{R_e}{n} \qquad \sigma_{max} = \frac{|M_t|_{max}}{W}$

$$\frac{R_e}{n} = \frac{\frac{1}{4}FL}{W_{min}} \Rightarrow W_{min} = \frac{nFL}{4R_e} = 3{,}17\cdot 10^{-4}\,m^3 = 317\cdot 10^3\,mm^3$$

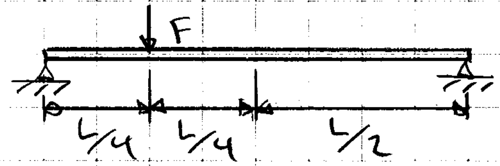
$\Rightarrow$ IPE240 ($W = 324\cdot 10^3\,mm^3$)

b)



$$v(x) = \frac{F}{6LEI}\left[ab(L+b)x - bx^3 + L\langle x-a\rangle^3\right]$$

$a + b = L$

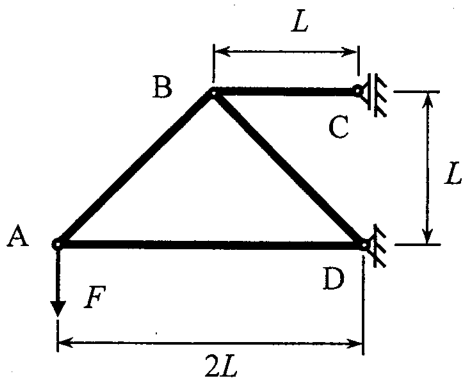


$$v(L/2) = \frac{F}{6LEI}\left\{\frac{1}{4}L\cdot\frac{3}{4}L\left(L+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}L + \dots - \frac{3}{4}L\cdot\left(\frac{1}{2}L\right)^3 + L\left(\frac{1}{2}L-\frac{1}{4}L\right)^3\right\} = \frac{11FL^3}{768EI}$$

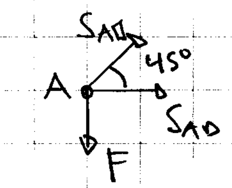
Symmetrian takia v_{max} keskellä ja $v_{max} = 2\cdot v(L/2) = \frac{11FL^3}{384EI}$

$$\Rightarrow \quad v_{sall} = \frac{11FL^3}{384EI_{min}} \Rightarrow I_{min} = \frac{11FL^3}{384Ev_{sall}} = 5{,}03\cdot 10^{-5}\,m^4 = 50{,}3\cdot 10^6\,mm^4$$

$\Rightarrow$ IPE 270 ($I = 57{,}9\cdot 10^6\,mm^4$)

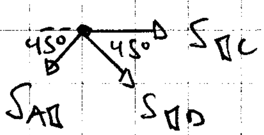


4. Kuvan ristikon kaikki sauvat valmistetaan samasta pyörötangosta. Laske tarvittava tangon halkaisija d täysinä millimetreinä, kun sauvat eivät saa myötää varmuudella 1,5 ja nurjahtaa varmuudella 3. $L = 1{,}0$ m, $F = 1000$ kN, $R_e = 275$ MPa ja $E = 210$ GPa.



$\uparrow \quad -F + S_{AB} \sin 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \sqrt{2}\, F$

$\rightarrow \quad S_{AB} \cos 45° + S_{AD} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AD} = -F$



$\uparrow \quad -S_{AB} \sin 45° - S_{BD} \sin 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{BD} = -\sqrt{2}\, F$

$\rightarrow \quad -S_{AB} \cos 45° + S_{BD} \cos 45° + S_{BC} = 0$

$\Rightarrow \quad S_{BC} = 2F$

Myödön suhteen sauva BC on määräävä.

$\sigma = \dfrac{N}{A}$, $\quad n = \dfrac{R_e}{\sigma_{sall}}$ $\quad$ ja $\quad A = \dfrac{\pi}{4} d^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{R_e}{n} = \dfrac{2F}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \underset{(-)}{+}\sqrt{\dfrac{8Fn}{\pi R_e}} = 0{,}1178 \text{ m}$

$= 118 \text{ mm}$

Puristetut sauvat AD ja BD voivat nurjahtaa.

$P_n = \dfrac{\pi^2 E I}{L_n^2}$ $\quad (L_n = L, \text{Euler II})$, $\quad n = \dfrac{P_n}{S}$ $\quad$ ja $\quad I = \dfrac{\pi}{64} d^4$

$\Rightarrow \quad n S_i = \dfrac{\pi^2 E \frac{\pi}{64} d^4}{L_i^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt[4]{\dfrac{64\, n S_i L_i^2}{\pi^3 E}}$

Sauva AD $(S_i = F$ ja $L_i = 2L)$ $\quad d = 0{,}1042 \text{ m} \doteq 105 \text{ mm}$

" BD $(S_i = \sqrt{2} F$ ja $L_i = \sqrt{2} L)$ $\quad d = 0{,}0956 \text{ m} = 96 \text{ mm}$

$\therefore \quad \underline{\underline{d = 118 \text{ mm}}}$