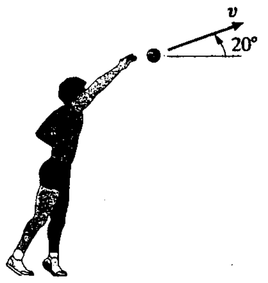
T1/TME-1200/K06

*Simo Virtanen, Tapio Salmi*

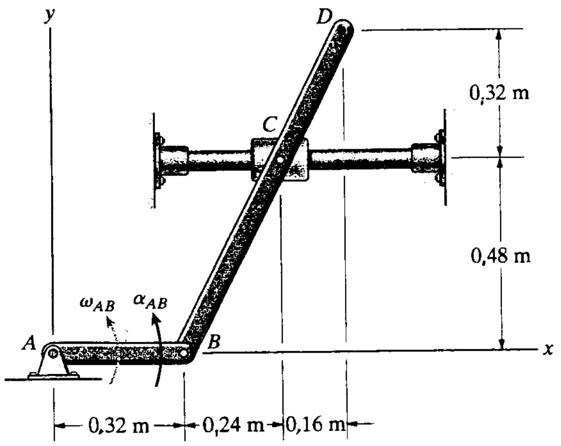
**TME-1200 DYNAMIIKAN PERUSTEET**

**Tentti** 16.5.2006

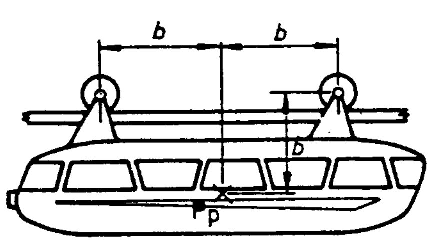
Mukana saa olla yksi A4-kokoinen oma kaavakokoelma molemmin puolin kirjoitettuna ja MAOLin tai Tammertekniikan taulukkokirja
Vastauspapereihin on kirjoitettava oma nimi, NIMEN SELVENNYS ja opiskelijanumero sekä tieto milloin harjoitukset on suoritettu.



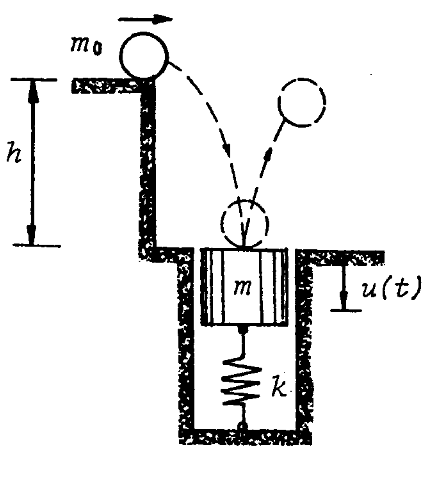

1. Urheilija työntää kuulalle lähtönopeuden $v = 16\ \mathrm{m/s}$ kuvan osoittamaan suuntaan. Laske kuulan radan kaarevuussäde 0,3 sekunnin kuluttua.



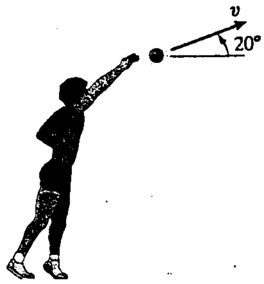

2. Sauvan AB kulmanopeus on $2\ 1/\mathrm{s}$ ja kulmakiihtyvyys $8\ 1/\mathrm{s}^2$ molemmat vastapäivään. Määritä pisteen D kiihtyvyys.




3. Valitse kuvan yksiraiteisen vaunun vetopyöräksi se, joka antaa vaunulle suurimman kiihtyvyyden $a$ oikealle ilman, että pyörä luistaa. Mikä on tämä kiihtyvyys, jos kitkakerroin on $\mu$. Pyörien rotaatiohitautta ei tarvitse ottaa huomioon.




4. Kuula, jonka massa $m_0 = 0{,}30\,\mathrm{kg}$, putoaa levossa olevan männän ($m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$) päälle. Törmäys on täysin kimmoinen (häviötön). Määritä männän vapaiden värähtelyjen vasteen amplitudi, kun $k = 200\,\mathrm{N/m}$ ja $h = 4\,\mathrm{m}$.




1. Urheilija työntää kuulalle lähtönopeuden $v = 16$ m/s kuvan osoittamaan suuntaan. Laske kuulan radan kaarevuussäde 0,3 sekunnin kuluttua.

Ratkaisu $\quad v_0 = 16 \quad \beta = 20^\circ \quad t_1 = 0{,}3$

järj (m, s)

Vinoheittoliike $\quad a_x = 0 \quad a_y = -g$

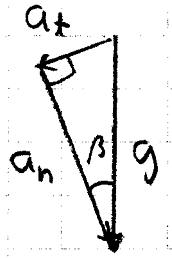
$$v_x = v_0 \cos\beta \qquad v_y = v_0 \sin\beta - gt$$

$$v_x = 16 \cos 20^\circ = 15{,}035$$

$$v_y = 16 \sin 20^\circ - 9{,}81 \cdot 0{,}3 = 2{,}529$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15{,}035^2 + 2{,}529^2} = 15{,}246$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n}$$

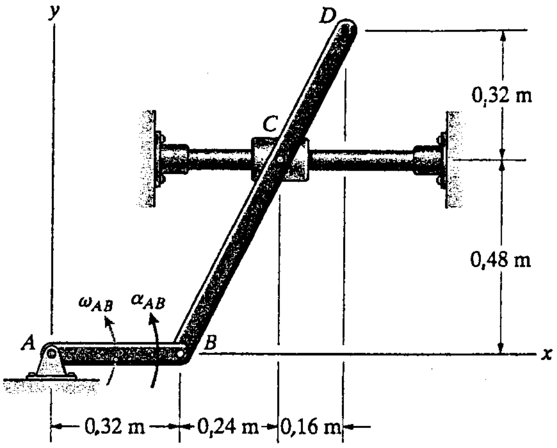



$$\vec{a} = -g\vec{j}$$

$$\beta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{2{,}529}{15{,}035} = 9{,}55^\circ$$

$$a_n = g \cos\beta = 9{,}81 \cdot \cos 9{,}55^\circ = 9{,}674$$

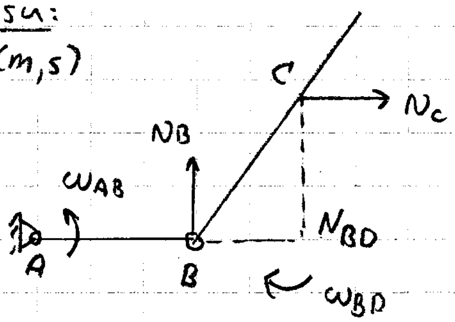
$$\rho = \frac{15{,}246^2}{9{,}674} = \underline{\underline{24{,}0\,\mathrm{m}}}$$




2. Sauvan AB kulmanopeus on 2 1/s ja kulmakiihtyvyys 8 $1/s^2$ molemmat vastapäivään. Määritä pisteen D kiihtyvyys.

Ratkaisu:

järj (m,s)




$r = |AB| = 0{,}32$

$b = |B\,N_{BD}| = 0{,}24$

$h = |C\,N_{BD}| = 0{,}48$

$v_B = r\,\omega_{AB} = b\,\omega_{BD}$

$\omega_{BD} = \dfrac{r}{b}\,\omega_{AB}$

$\omega_{BD} = \dfrac{0{,}32}{0{,}24}\,2 = 2{,}667$

$$\vec{a}_B = -\omega_{AB}^2 r\,\vec{i} + \alpha_{AB} r\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{r}_{C/B} - \omega_{BD}^2\,\vec{r}_{C/B} = a_C\,\vec{i}$$

$$-\omega_{AB}^2 r\,\vec{i} + \alpha_{AB} r\,\vec{j} - \alpha_{BD} h\,\vec{i} + \alpha_{BD} b\,\vec{j} - \omega_{BD}^2 b\,\vec{i} - \omega_{BD}^2 h\,\vec{j} = a_C\,\vec{i}$$

$\vec{j}$: $\quad \alpha_{AB} r - \alpha_{BD} b - \omega_{BD}^2 h = 0$

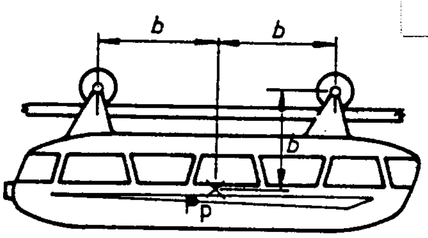
$$\alpha_{BD} = \frac{\alpha_{AB} r - \omega_{BD}^2 h}{b} = \frac{8 \cdot 0{,}32 - 2{,}667^2 \cdot 0{,}48}{0{,}24} = -3{,}556$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_{BD} \times \vec{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\,\vec{r}_{D/B}$$

$$= -2^2 \cdot 0{,}32\,\vec{i} + 8 \cdot 0{,}32\,\vec{j} + 3{,}556 \cdot 0{,}8\,\vec{i} - 3{,}556 \cdot 0{,}4\,\vec{j} +$$

$$-2{,}667^2 \cdot 0{,}4\,\vec{i} - 2{,}667^2 \cdot 0{,}8\,\vec{j} = -1{,}28\,\vec{i} - 4{,}55\,\vec{j}$$

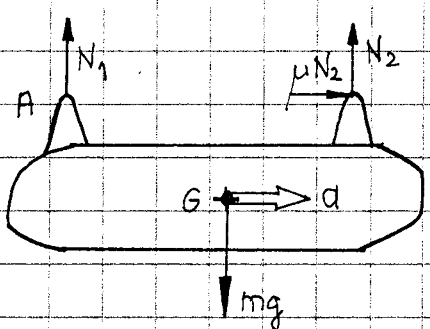
$\tan\varphi = \dfrac{4{,}55}{1{,}28} \Rightarrow \varphi = 74{,}3^\circ \qquad a_D = 4{,}73\ m/s^2$ $74^\circ$




**5.** Valitse kuvan yksiraiteisen vaunun vetopyöräksi se, joka antaa vaunulle suurimman kiihtyvyyden *a* oikealle, ilman että pyörä luistaa. Mikä on tämä kiihtyvyys, jos kitkakerroin on 0,30. Pyörien pyörimishitautta ei tarvitse ottaa huomioon.

$A \in K$, liikkuva piste!

$$\bar{M}_A = \bar{r}_{G/A} \times m\bar{a}_A + J_A \cancel{\bar{\alpha}}^{\,\bar{0}}$$

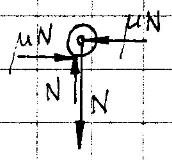



$$A)\ +N_2 \cdot 2b - mg \cdot b = +mab$$

$$\rightarrow \ +\mu N_2 = ma$$

$$\Rightarrow N_2 = \frac{ma}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cancel{m}a}{\mu} - \cancel{m}g = \cancel{m}a$$



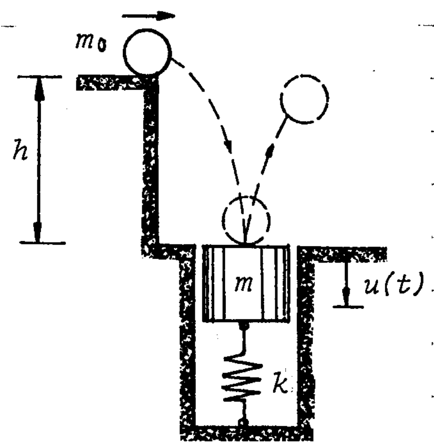

$$\Rightarrow \frac{2-\mu}{\mu} a = g$$

$$\Rightarrow a = \frac{\mu}{2-\mu} g$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{0,30}{2-0,30} \cdot 9,81 \ \frac{m}{s^2} \approx 1,73 \ \frac{m}{s^2} \quad \triangleleft$$

Jos onkin takavetoinen, niin

$$a = \frac{\mu}{2+\mu} g \approx 1,27 \ \frac{m}{s^2}$$




4. Kuula, jonka massa $m_0 = 0{,}30\,\mathrm{kg}$, putoaa levossa olevan männän ($m = 0{,}50\,\mathrm{kg}$) päälle. Määritä männän vapaiden värähtelyjen vasteen amplitudi, kun törmäys on täysin kimmoinen. $k = 200\,\mathrm{N/m}$, $h = 4\,\mathrm{m}$

Pallon nopeus ennen iskua

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Jousivoima ei ole impulsiivinen. Liikemäärä $p_y$ säilyy

$$\downarrow \quad m_0 v_1 + 0 = m_0(-v_1) + m v(0^+)$$

$$\Rightarrow \quad v(0^+) = \frac{2m_0}{m}\sqrt{2gh}$$

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad , \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$u(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\dot{u}(t) = -\overset{0}{\cancel{A}}\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\dot{u}(0^+) = v(0^+)$$

$$\Rightarrow \quad v(0^+) = B\omega \quad \Rightarrow \quad B = \frac{v(0^+)}{\omega}$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{v(0^+)}{\omega}\sin\omega t = \hat{u}\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{v(0^+)}{\omega} = \frac{2m_0}{m\sqrt{k/m}}\sqrt{2gh} = 2m_0\sqrt{\frac{2gh}{mk}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u} = 2\cdot 0{,}3\,\mathrm{kg}\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 4\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 200\,\mathrm{kg\,m/ms}}} \approx 0{,}532\ \mathrm{m}$$