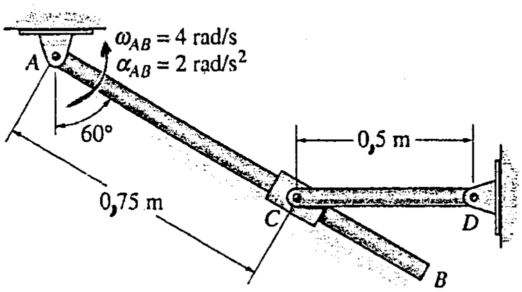
TME-1200 DYNAMIIKAN PERUSTEET
Tentti 11.9.2006

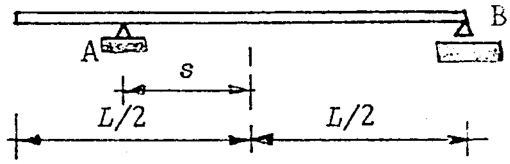
Mukana saa olla yksi A4-kokoinen oma kaavakokoelma molemmin puolin kirjoitettuna ja MAOLin tai Tammertekniikan taulukkokirja.

Vastauspapereihin on kirjoitettava oma nimi, NIMEN SELVENNÖS ja opiskelijanumero sekä tieto, milloin harjoitukset on suoritettu.

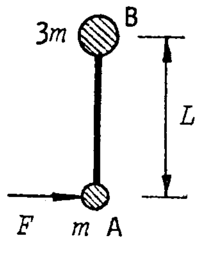
1. Kun käytetään järjestelmää (m,s), on partikkelin paikkavektori ajan funktiona
$$\bar{r}(t) = (t+1)^2\bar{i} + (t+1)^{-2}\bar{j}.$$
Määritä partikkelin radan tangentin ja normaalin suuntaiset kiihtyvyydet sekä radan kaarevuussäde, kun $t = 0$.



2. Luisti C liukuu pitkin sauvaa AB. Määritä sauvan CD kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys kuvan esittämällä hetkellä.



3. Kuvan palkki, jonka kokonaismassa on m, on homogeeninen ja tasapaksu. Tuki B poistetaan äkkiä. Kuinka etäälle s palkin keskipisteestä tuki A tulisi sijoittaa, jotta palkki saisi mahdollisimman suuren kulmakiihtyvyyden α heti tuen B poistamisen jälkeen? Määritä myös vastaava tukireaktio tuella A. Palkin hitausmomentti keskipisteensä suhteen
$$J_G = \frac{1}{12}mL^2.$$



4. Kuvan partikkelit A ja B on yhdistetty toisiinsa massattomalla jäykällä sauvalla. Systeemi voi liikkua vaakasuoralla kitkattomalla alustalla. Partikkelia A isketään voimalla F siten, että se saa nopeuden v_0 vaakasuoraan oikealle.

Määritä impulssilauseilla systeemin kulmanopeus ja massan B nopeus heti impulssin jälkeen.

Kun käytetään järjestelmää (m,s) on partikkelin paikkavektori ajan funktiona

$$\bar{r}(t) = (t+1)^2 \bar{i} + (t+1)^{-2} \bar{j} \ .$$

Määritä partikkelin radan tangentin ja normaalin suuntaiset kiihtyvyydet sekä radan kaarevuussäde, kun t = 0.

Ratkaisu

$$\vec{r}(t) = (t+1)^2 \vec{i} + (t+1)^{-2} \vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = 2(t+1)\, \vec{i} - 2(t+1)^{-3} \vec{j}$$

$$\vec{a}(t) = 2\vec{i} + 6(t+1)^{-4} \vec{j}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} \qquad \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$$

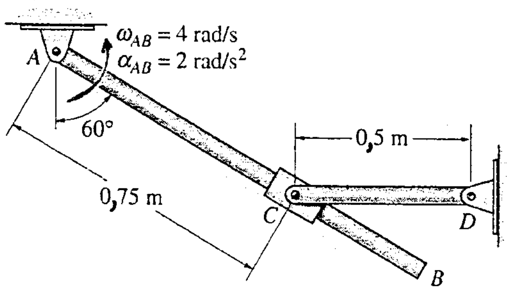
$$a_t = \vec{a} \cdot \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(2 - 6) = -2\sqrt{2} \approx \underline{\underline{-2{,}83}}$$

$$\vec{a}_t = -2\sqrt{2}\, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j}) = -2(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t = (2\vec{i} + 6\vec{j}) + 2(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{a}_n = 4\vec{i} + 4\vec{j} \qquad a_n = 4\sqrt{2} \approx \underline{\underline{5{,}66}}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2} = \underline{\underline{1{,}41}}$$

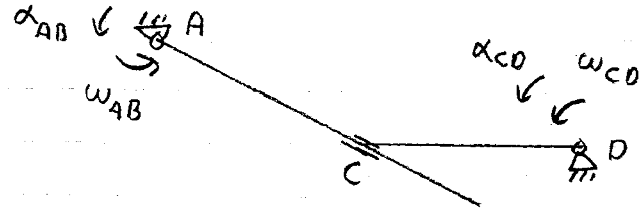


Luisti C liukuu pitkin sauvaa AB. Määritä sauvan CD kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys kuvan esittämällä hetkellä.

<u>Ratkaisu.</u> järj (m, s)

merkitään $r_{C/D} = 2a$; $r_{C/A} = 3a$

$a = 0{,}25$



$$\vec r_{C/D} = -2a\vec i$$

$$\vec r_{C/A} = 3a(\sin 60^\circ \vec i - \cos 60^\circ \vec j) = 1{,}5a(\sqrt3\,\vec i - \vec j)$$

$$\vec v_{rel} = 0{,}5\, v_{rel}(\sqrt3\,\vec i - \vec j)$$

$$\vec v_C = \vec\omega_{AB}\times\vec r_{C/A} + \vec v_{rel} = \vec\omega_{CD}\times\vec r_{C/D}$$

$$1{,}5a\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & 4\\ \sqrt3 & -1 & 0\end{vmatrix} + 0{,}5\, v_{rel}(\sqrt3\,\vec i - \vec j) = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & \omega_{CD}\\ -2a & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$6a\vec i + 6\sqrt3\, a\vec j + 0{,}5\sqrt3\, v_{rel}\vec i - 0{,}5\, v_{rel}\vec j = -2a\,\omega_{CD}\vec j$$

i-komp. $\quad 6a + 0{,}5\sqrt3\, v_{rel} = 0 \quad\Rightarrow\quad v_{rel} = -\frac{12a}{\sqrt3}$

j-komp $\quad +6\sqrt3\, a + \frac{6a}{\sqrt3} = -2a\,\omega_{CD} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\omega_{CD}}} = -4\sqrt3 \approx \underline{\underline{-6{,}93}}$

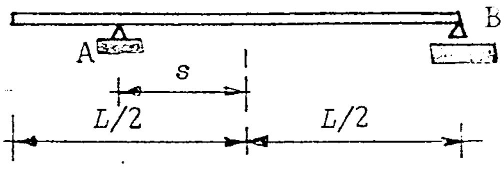
$$\vec a_C = \vec\alpha_{AB}\times\vec r_{C/A} - \omega_{AB}^2\vec r_{C/A} + 2\vec\omega_{AB}\times\vec v_{rel} + \vec a_{rel} = \vec\alpha_{CD}\times\vec r_{C/D} - \omega_{CD}^2\vec r_{C/D}$$

$$1{,}5a\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & 2\\ \sqrt3 & -1 & 0\end{vmatrix} - 16\cdot 1{,}5a(\sqrt3\,\vec i - \vec j) + 2\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{12a}{\sqrt3}\right)\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & 1\\ \sqrt3 & -1 & 0\end{vmatrix} + 0{,}5a_{rel}(\sqrt3\,\vec i - \vec j) =$$

$$= \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 0 & 0 & \alpha_{CD}\\ -2a & 0 & 0\end{vmatrix} - 48(-2a\vec i)$$

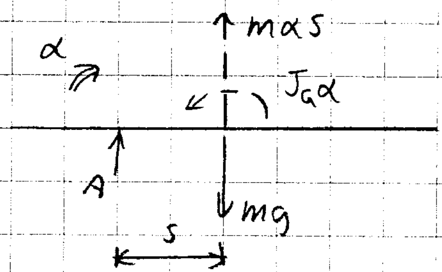
i-komp: $\quad 3a - 24\sqrt3\, a - \frac{48}{\sqrt3}a + 0{,}5\sqrt3\, a_{rel} = 96a \quad\Rightarrow\quad a_{rel} = 187{,}39a$

j-komp: $\quad 3\sqrt3\, a + 24a - 48a - 93{,}69a = -2a\,\alpha_{CD} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\alpha_{CD} = 56{,}25}}$



Kuvan palkki, jonka kokonaismassa on m, on homogeeninen ja tasapaksu. Tuki B poistetaan äkkiä. Kuinka etäälle s palkin keskipisteestä tuki A tulisi sijoittaa, jotta palkki saisi mahdollisimman suuren kulmakiihtyvyyden α heti tuen B poistamisen jälkeen? Määritä myös vastaava tukireaktio tuella A. Palkin hitausmomentti keskipisteensä suhteen $J_G = \frac{1}{12} mL^2$

Ratkaisu-



$$\curvearrowleft A) \quad m\alpha s^2 + J_G\alpha - mgs = 0$$

$$\alpha = \frac{mgs}{J_G + ms^2} = \frac{mgs}{mL^2/12 + ms^2} = \frac{gs}{L^2/12 + s^2}$$

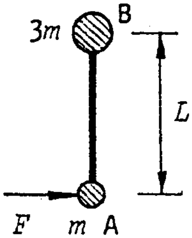
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{g(L^2/12 + s^2) - gs \cdot 2s}{(L^2/12 + s^2)^2} = 0$$

$$\frac{L^2}{12} - s^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{s = \frac{L}{\sqrt{12}}}} \approx 0{,}289\, L$$

$$\alpha\left(s = \frac{L}{\sqrt{12}}\right) = \frac{g\, L/\sqrt{12}}{L^2/12 + L^2/12} = \frac{6}{\sqrt{12}} \frac{g}{L} = \sqrt{3}\, \frac{g}{L} \approx 1{,}73\, \frac{g}{L}$$

$$\uparrow \quad +A + m\alpha s - mg = 0$$

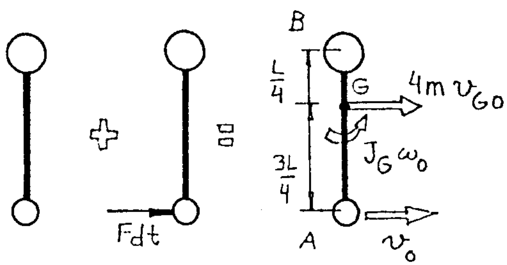
$$A = mg - m\alpha s = mg - m\sqrt{3}\,\frac{g}{L}\,\frac{L}{\sqrt{12}} = \underline{\underline{\frac{mg}{2}}}$$



4. Kuvan partikkelit A ja B on yhdistetty toisiinsa massattomalla jäykällä sauvalla. Systeemi voi liikkua vaakasuoralla kitkattomalla alustalla. Partikkelia A isketään voimalla F siten, että se saa nopeuden v_0 vaakasuoraan oikealle.

Määritä impulssilauseilla systeemin kulmanopeus ja massan B nopeus heti impulssin jälkeen.

RATKAISU:



(1) (2)

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{G/A}$$

$$= v_0 \vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & \frac{3L}{4} & 0 \end{vmatrix}$$

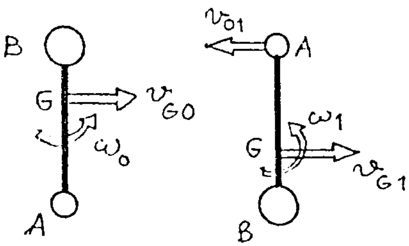
$$\Rightarrow \quad \vec{v}_G = \left(v_0 - \frac{3L}{4}\omega_0\right)\vec{i}$$

Impulssilauseet:

$$\begin{cases} \vec{p}(1) + \int \vec{F}\,dt = \vec{p}(2) \\ \vec{L}_G(1) + \int F \cdot \frac{3L}{4}\vec{k}\,dt = \vec{L}_G(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0 + \int F\,dt = 4m\,v_{G0} \\ 0 + \frac{3L}{4}\int F\,dt = J_G\,\omega_0 \end{cases}$$

$$J_G = m\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + 3m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}mL^2$$



(2) (4)

$$\Rightarrow$$

$$\frac{3L}{4}\cdot 4m\left(v_0 - \frac{3L}{4}\omega_0\right) = \frac{3}{4}mL^2\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = v_0/L$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A} = v_0\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & v_0/L \\ 0 & L & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_B = \vec{0}$$