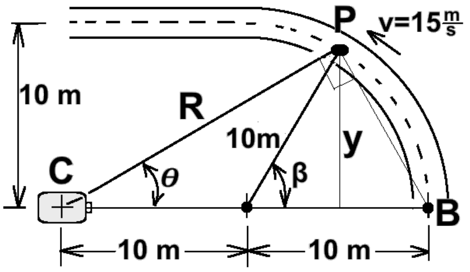
TTY / Teknisten tieteiden tiedekunta

Kone- ja tuotantotekniikka

MEI-30000 DYNAMIIKKA, 4 op

Kevät 2017

Välikoe 1 ratkaisut ti 21.02.2017



1. Kuvassa moottoripyöräilijä **P** ajaa kaarteessa vakionopeudella **v=15 m/s**. Kameraa **C** käännetään koko ajan siten, että se on kaarteessa suoraan moottoripyöräilijää kohti. Kaarteen säde on **10 m**. Määritä **sidotun liikkeen** menetelmällä kameran **C** kulmanopeus hetkellä, jolloin kulma $\theta = 30°$. (Kolmio **CPB** on suorakulmainen).

Kulmanopeus kaarteessa $\dot{\beta} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{r}} = \frac{15}{10} = 1{,}5\ \frac{1}{s}$, Kaarteen säde r = 10 m

Suorakulmaisesta kolmiosta CBP

$\Rightarrow\ R = \cos(\theta)\cdot(10+10) = 20\cdot\cos(\theta)$

$\Rightarrow$

$y = R\cdot\sin(\theta) = 20\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\theta) = 10\cdot\sin(2\cdot\theta)$ (1)

Toisaalta

$\mathrm{y} = \mathrm{r}\cdot\sin(\beta) = 10\cdot\sin(\beta)$ (2)

Kun $\theta = 30° \Rightarrow \mathrm{y} = 10\cdot\sin(\beta) = 10\cdot\sin(30°) = 5 \quad\Rightarrow\quad \sin(\beta) = \frac{y}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$\Rightarrow\quad \beta = 60°$

(1) == (2)

$10\cdot\sin(\beta) = 10\cdot\sin(2\cdot\theta)$ $\leftarrow$ Derivoidaan implisiittisesti ajan suhteen

$\Rightarrow$

$10\cdot\cos(\beta)\cdot\dot{\beta} = 20\cdot\cos(2\cdot\theta)\cdot\dot{\theta}$

$\Rightarrow$

$$\dot{\theta} = \frac{\cos(\beta)\cdot\dot{\beta}}{2\cdot\cos(2\cdot\theta)} = \frac{\cos(60°)\cdot 1{,}5}{2\cdot\cos(2\cdot 30°)} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75\ \frac{1}{s}$$

2. Tapa (1) == (2)

$10 \cdot \sin(\beta) = 20 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)$ ← Derivoidaan implisiittisesti ajan suhteen

$\Rightarrow$

$10 \cdot \cos(\beta) \cdot \dot{\beta} = -20 \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \dot{\theta} + 20 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \dot{\theta}$

$\Rightarrow$

$$\dot{\theta} = \frac{\cos(\beta) \cdot \dot{\beta}}{2 \cdot \left(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\right)} = \frac{\cos(60°) \cdot \dot{\beta}}{2 \cdot \left(\cos^2(30°) - \sin^2(30°)\right)} = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}5}{2 \cdot (0{,}75 - 0{,}25)} = 0{,}75 \ \frac{1}{s} \quad \leftarrow$$

3. Tapa

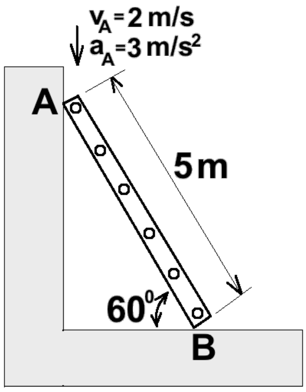
Ympyrän kehäkulma on puolet keskuskulmasta

$\Rightarrow$

$\theta = \frac{1}{2} \cdot \beta$ ← Derivoidaan implisiittisesti ajan suhteen

$\Rightarrow$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\beta} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = 0{,}75 \ \frac{1}{s} \quad \leftarrow$$



2. Kuvassa tikkaat ovat luistamassa seinustaa ja lattiaa pitkin. Tikkaiden yläpään **A** nopeus on **2 m/s** ja kiihtyvyys **3 m/s²** alaspäin kuvassa näkyvällä kulman arvolla **60°**. Määritä vektorialgebran keinoin tikkaiden **AB** kulmanopeus ja tikkaiden alapään pisteen **B** nopeus ja kiihtyvyys kuvan hetkellä. Tikkaiden pituus on **5 m**.

Järj. (m, s)

$$\bar{r}_{B/A} = \overline{AB} \cdot \cos(60°)\,\bar{i} - \overline{AB} \cdot \sin(60°)\,\bar{j} = 5 \cdot \frac{1}{2}\,\bar{i} - 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j} = 2{,}5 \cdot \bar{i} - 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \bar{j}$$

Tunnetaan

$$\bar{v}_A = -2 \cdot \bar{j} \quad , \quad \bar{a}_A = -3 \cdot \bar{j}$$

Tuntemattomat

$$\bar{\omega}_{AB} = \omega_{AB} \cdot \bar{k} \quad , \quad \bar{v}_B = v_B \cdot \bar{i} \quad , \quad \bar{a}_B = a_B \cdot \bar{i} \quad , \quad \bar{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB} \cdot \bar{k}$$

Muodostetaan kohdan B nopeus ja kiihtyvyys.

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{B/A}$$

$$\Rightarrow$$

$$\bar{v}_B = v_B \bar{i} = v_A \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 2{,}5 & -2{,}5 \cdot \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \bar{j} + 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{AB} \bar{i} + 2{,}5 \cdot \omega_{AB} \bar{j}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} i: \quad v_B = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \omega_{AB} & \Rightarrow v_B = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot 0{,}8 \approx 3{,}46 \ \frac{m}{s} \\ j: \quad 0 = -2 + 2{,}5 \cdot \omega_{AB} & \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}80 \ \frac{1}{s} \end{cases}$$

Kohdan B nopeus

Tikkaiden AB kulmanopeus

Kohdan B kiihtyvyys

$$\bar{a}_B = a_B \cdot \bar{i} = \bar{a}_A + \bar{\alpha}_{AB} \times \bar{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \bar{r}_{B/A} \qquad A \to B$$

$\bar{a}_A = -3 \cdot \bar{j}$ Annettu kiihtyvyys alaspäin

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_B = a_B \cdot \bar{i} = \bar{a}_A + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{AB} \\ 2{,}5 & -2{,}5 \cdot \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} - \omega_{AB}^2 \cdot (2{,}5 \cdot \bar{i} - 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot j)$$

$\Rightarrow$

$$a_B \cdot \bar{i} = -3 \cdot \bar{j} + 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_{AB} \cdot \bar{i} + 2{,}5 \cdot \alpha_{AB} \cdot \bar{j} - (0{,}80)^2 \cdot (2{,}5 \cdot \bar{i} - 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot j)$$

$\Rightarrow$

$$a_B \cdot \bar{i} = -3 \cdot \bar{j} + 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_{AB} \cdot \bar{i} + 2{,}5 \cdot \alpha_{AB} \cdot \bar{j} - 1{,}6 \cdot \bar{i} + 1{,}6 \cdot \sqrt{3} \cdot j$$

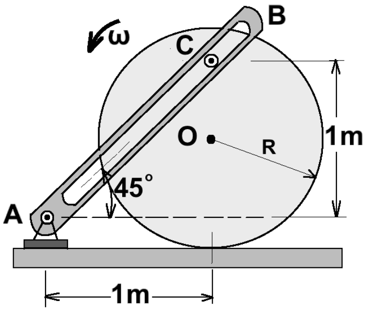
$\Rightarrow$

$$\begin{cases} i: \quad a_B = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_{AB} - 1{,}6 \\ j: \quad 0 = -3 + 2{,}5 \cdot \alpha_{AB} + 1{,}6 \cdot \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tikkaiden AB kulmakiihtyvyys α_{AB} ja kohdan B kiihtyvyys a_B

$$j: \to \qquad \alpha_{AB} = \frac{3 - 1{,}6 \cdot \sqrt{3}}{2{,}5} \approx 0{,}0915 \ \frac{1}{s^2} \qquad \leftarrow$$

$$i: \to \qquad a_B = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \alpha_{AB} - 1{,}6 = 2{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{3 - 1{,}6 \cdot \sqrt{3}}{2{,}5} \right) - 1{,}6 \ \frac{m}{s^2} \approx -1{,}204 \ \frac{m}{s^2} \qquad \leftarrow$$



3. Kuvan systeemin ympyrälevy liikkuu luistamatta vastapäivään vakiokulmanopeudella **ω=5 1/s**. Ympyrälevyn tappi **C** liikkuu hahlossa. Määritä vektorialgebran keinoin hahlosauvan **AB** kulmanopeus ja kulmakiihtyvyys hetkellä, kun hahlosauvan ja vaakatason välinen kulma on **45°**.

$R = 0{,}7m \quad , \quad \bar{r}_{C/A} = \bar{i} + \bar{j} \quad , \quad \bar{r}_{C/O} = 0{,}5\cdot \bar{j}$

Paikkavektorit

$$\bar{r}_{C/O} = 0{,}5\cdot \bar{j} \quad , \quad \bar{r}_{B/A} = \bar{i} + \bar{j} \quad , \quad \bar{v}_{rel} = v_{rel}\cdot \left(\cos(45°)\cdot \bar{i} + \sin(45°)\cdot \bar{j}\right) = v_{rel}\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right)$$

Piste C == ympyrälevyssä

$$\bar{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\cdot \bar{k} \quad , \quad \bar{v}_C = \bar{v}_A + \bar{\omega}_{AB} \times \bar{r}_{B/A} + \bar{v}_{rel} = \bar{v}_A + \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega_{AB} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \bar{v}_{rel} \quad \text{,Pisteen C nopeus A:sta (1)}$$

$\Rightarrow \qquad (\bar{v}_A = 0)$

$$\bar{v}_C = 0 - \omega_{AB}\cdot \bar{i} + \omega_{AB}\cdot \bar{j} + v_{rel}\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) \qquad \text{Pisteen C nopeus A:sta (1)}$$

Ympyrälevyn keskipisteen nopeus $\qquad \bar{v}_O = -R\cdot \omega\cdot \bar{i} = -0{,}7\cdot 5\cdot \bar{i} = -3{,}5\cdot \bar{i}$

Ympyrälevyn vakiokulmanopeus $\qquad \bar{\omega} = 5\cdot \bar{k}$

$$\bar{v}_C = \bar{v}_O + \bar{\omega} \times \bar{r}_{C/O} = -3{,}5\cdot \bar{i} + \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} = -3{,}5\cdot \bar{i} - 2{,}5\cdot \bar{i} = -6{,}0\cdot \bar{i} \qquad \text{Pisteen C nopeus O:stä (2)}$$

$(1) = (2)$

$\Rightarrow$

$$-\omega_{AB}\cdot \bar{i} + \omega_{AB}\cdot \bar{j} + v_{rel}\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) = -6{,}0\cdot \bar{i}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{i}: \quad -\omega_{AB} + v_{rel}\cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -6{,}0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{AB} = 3{,}0 \ \dfrac{1}{\mathrm{s}} \\ \bar{j}: \quad \omega_{AB} + v_{rel}\cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{rel}} = -3{,}0\cdot \sqrt{2} \ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{cases}$$

$$\sum\left(0 + 2\cdot v_{rel}\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -6{,}0 + 0 \quad \Rightarrow \quad v_{rel} = -\frac{6{,}0\cdot \sqrt{2}}{2} = -3{,}0\cdot \sqrt{2} \approx -4{,}23 \ \frac{m}{s}$$

$\bar{\alpha} = 0 \quad , \quad \bar{\alpha}_{AB} = \alpha_{AB}\bar{k}$ Hahlosauvan AB kulmakiihtyvyys

$\bar{a}_{rel} = a_{rel} \cdot \left(\cos(45°) \cdot \bar{i} + \sin(45°) \cdot \bar{j}\right) = a_{rel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right)$ Suhteellinen kiihtyvyys

$\bar{a}_A = 0$

$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{\alpha}_{AB} \times \bar{r}_{C/A} - \omega^2 \cdot \bar{r}_{C/A} + 2\bar{\omega}_{AB} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$ Pisteen C kiihtyvyys A : stä (3)

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_C = 0 + \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \alpha_{AB} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - (3{,}0)^2 \cdot (\bar{i} + \bar{j}) + 2 \cdot \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 3{,}0 \\ -3{,}00 & -3{,}00 & 0 \end{bmatrix} + a_{rel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) \quad \leftarrow (3)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_C = 0 - \alpha_{AB} \cdot \bar{i} + \alpha_{AB} \cdot \bar{j} - (3{,}0)^2 \cdot (\bar{i} + \bar{j}) + 2 \cdot (3{,}0)^2 \cdot (\bar{i} - \bar{j}) + a_{rel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) \quad \leftarrow (3)$$

$\bar{a}_C = \bar{a}_O + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{C/O} - \omega^2 \cdot \bar{r}_{C/O}$ Pisteen C kiihtyvyys O : stä (4)

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_C = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix} - (5)^2 \cdot (0{,}5) \cdot \bar{j} = 0 - 12{,}5 \cdot \bar{j} = -12{,}5 \cdot \bar{j} \quad \leftarrow (4)$$

$(3) = (4)$

$\Rightarrow$

$$-\alpha_{AB} \cdot \bar{i} + \alpha_{AB} \cdot \bar{j} - (3{,}0)^2 \cdot (\bar{i} + \bar{j}) + 2 \cdot (3{,}0)^2 \cdot (\bar{i} - \bar{j}) + a_{rel} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) = -12{,}5 \cdot \bar{j}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{i}: \quad -\alpha_{AB} - (3{,}0)^2 + 2 \cdot (3{,}0)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{rel} = 0 \\ \bar{j}: \quad \alpha_{AB} - (3{,}0)^2 - 2 \cdot (3{,}0)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{rel} = -12{,}5 \end{cases}$$

$$\sum 0 - 2 \cdot (3{,}0)^2 - 0 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a_{rel} = -12{,}5 \quad \Rightarrow \quad a_{rel} \approx 3{,}89 \ \frac{m}{s^2} \quad \leftarrow$$

$\Rightarrow$ Hahlosauvan AB kulmakiihtyvyys

$$(i :\rightarrow) \ \alpha_{AB} \approx -(3{,}0)^2 + 2 \cdot (3{,}0)^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 3{,}89 \approx 11{,}75 \ \frac{1}{s^2} \quad \leftarrow$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{\omega} \times \bar{r}_{2/1} + \bar{v}_{rel}$$

$$\bar{a}_2 = \bar{a}_1 + \bar{\alpha} \times \bar{r}_{2/1} - \omega^2 \bar{r}_{2/1} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} + \bar{a}_{rel}$$