Tampereen yliopisto

MAT-60150 Differentiaaliyhtälöt / Riikka Kangaslampi (SC309)
Tentti 6.5.2019 klo 17-20

Kokeessa saa käyttää mitä tahansa laskinta. Tehtäväpaperin kääntöpuolella on kaavakokoelma. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen.

Muista perustella ratkaisusi huolellisesti!

Tehtävät

1) Ratkaise seuraavat differentiaaliyhtälöt annetuilla alkuarvoilla. Kerro, mitä ratkaisumenetelmää kulloinkin käytät.

   a) $xy' - y = x^3, \quad y(1) = 1$

   b) $(x+2)y' = x^2y - 4y, \quad y(0) = 0$

   c) $xe^x + e^x - e^y - xe^y y' = 0, \quad y(1) = 2$

2) a) Osoita, että alkuarvotehtävällä

$$y'(t) = t\sin(y) + y\cos(t), \quad y(0) = 0,$$

   on yksikäsitteinen ratkaisu alueessa, jossa $|t| \leq a$ ja $|y| \leq b$. (4 p.)

   b) Osoita, että $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_{t_0}$ on differentiaaliyhtälön $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ ratkaisu alkuehdolla $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$, kun $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}_{t_0} \in \mathbb{R}^n$. (2 p.)

3) Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

   alkuehdolla $\mathbf{x}(0) = (1,-1)^T$ ja tarkista saamasi ratkaisu. Miten ratkaisukäyrä käyttäytyy, kun $t \to \infty$?

4) Hollantilainen sähköinsinööri Balthasar van der Pol esitti työskennellessään Philipsillä 1920-luvulla epälineaarisen yhtälön

$$y'' - (1-y^2)y' + y = 0,$$

   joka liittyy oskillaattorien mallintamiseen. Esitä van der Polin yhtälö ryhmänä ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöitä ja linearisoi sitten saamasi systeemi kunkin sen tasapainopisteen ympäristössä. Mitä linearisoinnin perusteella voidaan sanoa tasapainopisteiden stabiiliudesta?

Kaavakokoelma

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0, \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\sup_D\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le L$$

$$e^{\mathbf{A}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{V}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{V}^{-1}$$

$$e^{t\mathbf{J}}=e^{t\mathbf{D}}e^{t\mathbf{N}}, \quad \mathbf{J}=\mathbf{D}+\mathbf{N}$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\alpha t}\,[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]\begin{bmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t)\end{bmatrix}[\mathbf{u}\ \mathbf{v}]^{-1}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{u}+\int_{t_0}^{t}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)ds$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$D\mathbf{F}(\mathbf{p})=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$$

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k), \quad k=0,\ldots,N-1.$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\,f(x_k,y_k)\\
k_2 &= h\,f(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{k_1}{2})\\
k_3 &= h\,f(x_k+\frac{h}{2},y_k+\frac{k_2}{2})\\
k_4 &= h\,f(x_k+h,y_k+k_3)\\
y_{k+1} &= y_k+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)
\end{aligned}$$