MAT-31101 Numeerinen analyysi 1 tentti 30.1.2007
MAT-31106 Numerical Analysis 1 Exam 30.1.2007

Tentissä saa käyttää graafista/ohjemoitavaa laskinta ja yhtä kaksipuolista A4 sivua muistiinpanoja.

You are allowed to use a graphing/programmable calculator and one two-sided A4 sheet of notes.

1. Arvioi suureen x^2y^3 suhteellinen virhe ja anna oikeiden desimaalien lukumäärä, kun $x = 1{,}21$ (2 oikeaa desimaalia) ja $y = 3{,}721$ (3 oikeaa desimaalia).

   Estimate the relative error and give the number of correct decimals of x^2y^3 when $x = 1.21$ (2 correct decimals) and $y = 3.721$ (3 correct decimals).

2. Laske yhtälön $(x-1)(x-2)(x-3) + 10^{-3} = 0$ kaikki juuret.

   Find all the roots of $(x-1)(x-2)(x-3) + 10^{-3} = 0$.

3. Etsi Newtonin polynomi $p(x)$, joka interpoloi taulukossa olevat pisteet, ja laske $p(0)$. Selitä, miksi arvo $p(0)$ pysyisi samana, vaikka taulukon sarakkeet olisivat eri järjestyksessä.

x	69	32	−14	−71
y	24	25	26	27

   Find the Newton polynomial $p(x)$ that interpolates the data tabulated above and compute $p(0)$. Explain why the value of $p(0)$ would not change if the table columns were reordered.

4.
```
>> f=@(x) cos(x)/sqrt(x);
>> quad(f,0,1)

Error in ==> quad at 71
if ~isfinite(y(7))
```

   Ylläoleva MATLAB sessio on epäonnistunut yritys laskea integraalin $\int_0^1 x^{-1/2}\cos(x)\,dx$ arvoa Simpsonin kaavan avulla. Selitä, mistä virheilmoitus johtuu, ja laske integraali.

   The above MATLAB input and output is a failed attempt to compute $\int_0^1 x^{-1/2}\cos(x)\,dx$ using Simpson's rule. Explain the failure, and compute the integral.

5. Etsi kolmannen asteen polynomi, joka on taulukossa olevan datan paras neliösumman approksimaatio. Selitä, miksi Lagrangen interpolointipolynomi on paras neljännen asteen neliösumman approksimaatio. (Neljännen asteen polynomia ei tarvitse laskea.)

x_i	−2	−1	0	1	2
$f(x_i)$	4	6	8	11	16

   Find the degree-3 polynomial that is the best least squares approximation of the data tabulated above. Explain why the Lagrange interpolating polynomial is the best least squares degree-4 approximating polynomial. (You need not compute the degree-4 polynomial).

6. Olkoon alkuarvotehtävä $y' - y + y^2 = 0,\ y(0) = \frac{1}{2}$. Laske $y(1)$ käyttäen Heunin menetelmää ja askelpituutta $h = 1/4$. Kuinka paljon pienemmäksi virhe tulisi, jos askelpituus olisi $h = 1/100$? (Ei tarvitse laskea $h = 1/100$ vastaavaa ratkaisua.) vituiks

   Consider the initial value problem $y' - y + y^2 = 0,\ y(0) = \frac{1}{2}$. Compute $y(1)$ using Heun's method with step size $h = 1/4$. How much smaller would the error be if the step size were $h = 1/100$? (You need not compute the solution for $h = 1/100$.)

   Heunin menetelmä: / Heun's method

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1),\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}k_1 + \frac{h}{2}k_2$$