Algoritmimatematiikka

Tentti 18.02.2010

Ei laskinta tai kirjallista materiaalia. Tautologia- ja interferenssikokoelma kääntöpuolella.

Puolita saamasi konseptiarkit neljäksi A4-kokoiseksi paperiksi. Kirjoita kunkin tehtävän ratkaisu eri paperille. Eri tehtävien ratkaisupaperit kerätään erillisiin pinoihin.

1. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$.

   (a) Mitä seuraavista relaatio R on ja miksi: refleksiivinen, symmetrinen, transitiivinen, ekvivalenssirelaatio?

   (b) Esitä relaation R refleksiivinen sulkeuma $r(R)$, symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja transitiivinen sulkeuma $t(R)$ sekä joukko R^2.

2. Mikä/mitkä ovat teorian $((A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)) \rightarrow (B \rightarrow D)$ premissi(t) ja johtopäätös? Todista teoria käyttäen interferenssisääntöjä.

   (Huom. Todistus muulla tavalla tuottaa enintään 3 pistettä.)

3. (a) Tarkastellaan rekursiivisesti esitettyä funktiota

$$f(x, L) = \begin{cases} \langle x\rangle, & \text{jos } L = \langle\rangle \\ \operatorname{cons}(x, L), & \text{jos } x \leq \operatorname{head}(L) \\ \operatorname{cons}(\operatorname{head}(L),\ f(x, \operatorname{tail}(L))) & \text{muuten} \end{cases}$$

   Tässä $\operatorname{cons}(x, L)$ tarkoittaa alkion x lisäämistä ensimmäiseksi listaan L. Esitä yksityiskohtaisesti kaikki rekursion vaiheet läpikäyden, mitä ovat $f(3, \langle 2, 1, 5\rangle)$ ja $f(4, \langle 3\rangle)$

   (b) Todista, että $n^3 - 2n^2 + n - 4 = O(n^3)$, kun $n \in \mathbb{N}$.

4. Tarkastellaan joukkoja

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \operatorname{floor}(\log_2 x) = 2\}$$
$$B = \{x \in \operatorname{Lists}[\{a, b, c\}] : \text{jonon } x \text{ pituus on } 1\}$$

   (a) Esitä joukot A ja B luetellen kaikki niiden alkiot.

   (b) Vastaa kysymyksiin perustellen:

      i. Onko funktion $f : A \rightarrow B$ mahdollista olla injektio?

      ii. Onko funktion $f : A \rightarrow B$ mahdollista olla surjektio?

      iii. Päteekö $\forall x \in A\, \exists y \in \mathbb{N} :\ x = 4 + y \bmod 4$?

      iv. Onko joukon B mahtavuus $|B| = 5$?

(Huom. Jos et osaa kohtaa (a), voit kuitenkin vastata kohtaan (b), kun <u>keksit itse</u> jotkin kaksi joukkoa A_1 ja B_1 siten, että ne ovat epätyhjiä ja lisäehtona tässä tapauksessa on, että B_1:ssä on enemmän alkioita kuin A_1:ssa.)

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \lor \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \land \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$
	$p \lor \mathbf{e} = p$	$p \land \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$
	$p \lor p = p$	$p \land p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$
	$p \lor \neg p = \mathbf{t}$	$p \land \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$
			$p \to p = \mathbf{t}$
			$p \to q = \neg p \lor q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \land \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \land q = q \land p$	$p \land (q \land r) = (p \land q) \land r$	$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$
$p \lor q = q \lor p$	$p \lor (q \lor r) = (p \lor q) \lor r$	$p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$	$p \land (p \lor q) = p$
$\neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$	$p \lor (p \land q) = p$
	$p \land (\neg p \lor q) = p \land q$
	$p \lor (\neg p \land q) = p \lor q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \land B}$	**Simp** $\dfrac{A \land B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \lor B}$	**DS** $\dfrac{A \lor B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \lor B(x)) = \exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \land B(x)) = \forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \lor A(x)) = C \lor \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \land A(x)) = C \land \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \lor A(x)) = C \lor \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \land A(x)) = C \land \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \lor B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	