TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20401 Vektorianalyysi
Tentti 15.12.2010

Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.

1. Olkoot kahden kappaleen paikkavektorit ajan t funktioina

$$\mathbf{r}_1(t) = (3+2t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k} \quad \text{ja}$$
$$\mathbf{r}_2(t) = (5-2t^3)\mathbf{i} + (1-t^3)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

a) Osoita, että kappaleet liikkuvat pitkin samaa käyrää.
b) Määritä parametriväli kummassakin tapauksessa, kun liike tapahtuu pisteiden $(3,0,1)$ ja $(21,9,-8)$ välillä.
c) Laske kummankin kappaleen maksimi- ja minimivauhti **b**-kohdan siirtymissä.

2. Olkoon S paraboloidin $z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ se osa, joka on tason $z=4$ alapuolella. Laske S:n pinta-ala. $\|N\|\,ds$

3. Olkoon S sylinteripinnan puolikas

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 3, \ x \le 0, \ 0 \le z \le 2\}. \quad r(t) \quad r\cos\theta\, j\, r\sin\theta, z$$

Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ vuo S:n läpi z-akselista poispäin. $\downarrow N \ dx \ i \ \partial \ k$

4. Vastaa vain joko **A**- tai **B**-kohtaan (huonompi huomioidaan).

A. Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ vuo $\boxed{\text{puolipallon}}$ $(2\sin\theta\cos\theta)^3$ täydess $\theta = 2\pi$, $\phi = \pi$ dy (myt pitää muutta

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \le 4, \ y \le 0\} \to N(\phi,\theta) \text{ katso valmis kaava}$$

Pallokoordinaatit $a=2$

reunapinnan läpi joukosta T poispäin.

B. Kohdissa **i** ja **ii** Matlab-koodilla yritetään ratkoa eräs kurssin pintaintegrointitehtävä.

Selvitä kummassakin kohdassa, mikä tehtävä on kyseessä. Erityisesti kuvaile tarkkaan, millainen pinta S on (ilmaise S esimerkiksi xyz-koordinaateissa, sanallisesti tai hyvän kuvan avulla).

Toisessa koodeista on lisäksi virhe. Mikä se on ja miten se korjataan?

i)
```
syms x y z u v real
r=[sqrt(2)*sin(u)*cos(v),sqrt(2)*sin(u)*sin(v),sqrt(2)*cos(u)]
N=cross(diff(r,u),diff(r,v))
NN=sqrt(N*N')
int(int(subs(x^2+y^2+z^2,[x,y,z],r)*NN,u,0,pi/2),v,0,2*pi)
```
ii)
```
syms x y z u v real
T=[u*cos(v),u*sin(v),z]
F=[x*y,y*z,z*x]
int(int(int(subs(div(F,[x,y,z]),[x,y,z],T),u,0,1),v,0,pi),z,0,1)
```

Tehtäväkohtaiset tulokset julkaistaan POPissa periodin 2/2010–2011 toteutuskerran sivulla.

MAT-20401 Vektorianalyysi, tentin kaavaliite

1. **(1)** $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

(2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

(3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

(4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

(5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$

(6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

(7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$

(8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

(9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \dfrac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \dfrac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{v^3},$

$a_T = v', \quad a_n = \kappa v^2$

3. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$

4. $\displaystyle \oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_R \nabla \bullet \mathbf{F}\, dx\, dy$

5. $\displaystyle \iint_{\partial T} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\, dV$

6. $\displaystyle \oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$

7. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dx\, dy\, dz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

8. $\mathbf{N}(\phi, \theta) = a^2 \sin\phi\, (\sin\phi\cos\theta,\ \sin\phi\sin\theta,\ \cos\phi), \quad \|\mathbf{N}(\phi,\theta)\| = a^2 \sin\phi$

9. $\sin(2t) = 2\sin t \cos t, \qquad \sin^2 t = \dfrac{1 - \cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$