TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-20400 Vektorianalyysi
Tentti 12.1.2009

- Ei laskinta eikä taulukkokirjoja. Kaavaliite on ohessa.
- Kirjoita jokaiseen vastauspaperiin nimesi ja opiskelijanumerosi.
- Jos sinulla on **bonuspisteitä periodilta 1/2008–9**, niin merkitse vastauspaperiin "Periodi 1". (Periodin 2/2008–9 bonuspisteet samoin kuin kaikki aiemmin suoritetut harjoituspaketit otetaan huomioon automaattisesti.)

1. Laske käyräintegraali

$$\int_C (x^2 - y + 3z)\, ds,$$

missä C on jana pisteestä $(0,0,0)$ pisteeseen $(1,2,1)$.

2. Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ vuo pinnan

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - y^2, \ 0 \le x \le 1, \ z \ge 0\}$$

läpi ylöspäin.

3. Laske kentän $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ vuo pallopinnan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ läpi origosta poispäin.

4. Olkoon $\mathbf{F} = (-y+z)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}$ ja

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 4 - x^2 - y^2, \ z \ge 0\}.$$

Totea Stokesin lauseen

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\, dS$$

paikkansapitävyys tässä tapauksessa laskemalla lauseen molempien puolien integraalit.

MAT-20400 Vektorianalyysi, kokeen kaavaliite

1. (1) $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

   (2) $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

   (3) $\nabla(\mathbf{F} \bullet \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F}$

   (4) $\nabla \bullet (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \bullet (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \bullet (\nabla \times \mathbf{G})$

   (5) $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \bullet \mathbf{G}) - (\mathbf{F} \bullet \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \bullet \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \bullet \mathbf{F})$

   (6) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g$

   (7) $\nabla \bullet (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \bullet \mathbf{G} + f(\nabla \bullet \mathbf{G})$

   (8) $\nabla \times (f\mathbf{G}) = (\nabla f) \times \mathbf{G} + f(\nabla \times \mathbf{G})$

   (9) $\nabla[h(f(\mathbf{r}))] = h'(f(\mathbf{r}))\nabla f(\mathbf{r})$

2. $$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$$

3. $$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\,ds = \int_C P\,dx + \int_C Q\,dy + \int_C R\,dz$$

4. $$\oint_{\partial R} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

5. $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$$

6. $$\iint_S f\,dS = \iint_R f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

7. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \bullet (\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v))\,du\,dv$$

8. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iint_R \mathbf{F}(x,y.\,z(x,y)) \bullet \Big(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\Big)\,dx\,dy$$

9. $$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\,dS = \iiint_T \nabla \bullet \mathbf{F}\,dV$$

10. $$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \bullet \mathbf{n}\,dS$$

11. $$f(\mathbf{r}) = \int_{A_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

12. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t \qquad \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$