

MAT-13450 Laaja matematiikka 5

Tentti 26.05.2010

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

1. Laske integraali $\iint_S \frac{\sin x}{x} da$, kun $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y, x \leq 1, y \leq 1\}$.
2. Laske $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + z^2} dv$, missä $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ on kappale, jota rajoittavat tasot $y + z = 2$ ja $y = 0$ sekä sylinteri $x^2 + z^2 = 1$.
3. Mitä olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen avulla voidaan sanoa seuraavien alkuarvotehtävien ratkaisuisista:
 - a) $y' = x^2 y^{\frac{1}{2}}, y(0) = 1$,
 - b) $y' = x^2 y^{\frac{1}{2}}, y(1) = 1$?
 - c) Ratkaise yllä olevista alkuarvotehtävistä ne, joilla yksikäsitteinen ratkaisu on olemassa.

4. Muunna funktioita $y(t)$, $u(t)$ koskeva differentiaaliyhtälöpari

$$\begin{cases} y'' - 2u'' + y' - 3u' - y + u = \sin t \\ 2y'' - 2u'' + 3y' - u' - 4y = e^t \end{cases}$$

differentiaaliyhtälösystemiksi (normaaliryhmäksi)

$$\mathbf{x}'(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t).$$

5. Tarkastellaan differentiaaliyhtälösystemiä

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

- a) Hae differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu.
- b) Ratkaise differentiaaliyhtälö alkuarvolla $\mathbf{x}(0) = [0 \ 1]^T$.
- c) Onko systeemi tasapainopisteessään $\mathbf{0}$ stabiili?