

**MAT-13411 Laaja Matematiikka 1i**  
**Tentti 23.10.2009**  
**Esko Turunen**

1. Oletetaan, että jos luonnollisella luvulla  $m$  on ominaisuus  $A$ , niin luvulla  $m$  on myös ominaisuus  $B$ .

- (a) Luvulla 313 ei ole ominaisuutta  $A$ . Mitä tästä voidaan päätellä?
- (b) Luvulla 5279 ei ole ominaisuutta  $B$ . Mitä tästä voidaan päätellä?
- (c) Todista induktiolla, että  $n^2 + n$  on parillinen, kun  $n$  on positiivinen kokonaisluku.

2. Oletetaan tunnetuksi, että

1° jokainen rationaaliluku voidaan esittää muodossa  $\frac{m}{n}$ , missä korkeintaan toinen luvuista  $m, n$  on parillinen,

2° jos kokonaisluvun  $n$  neliö  $n^2$  on parillinen, myös  $n$  on parillinen. Todista, ettei  $\sqrt{2}$  ole rationaaliluku.

3. (a) Esitä kompleksiluku  $-\sqrt{3} + i$  kompleksitason pisteenä  $(a, b)$ , polaarimuodossa ja eksponenttimuodossa.

(b) Onko  $1 + i$  polynomien  $p(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 4x - 2$  juuri?

4. (a) Millä vakion  $a$  arvoilla vektoreiden

$$\mathbf{r} = (1, 1, -1) \text{ ja } \mathbf{s} = (-3, 2, a)$$

väläinen kulma on tylppä?

(b) Mitä pitää vektoreista  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  ja  $\mathbf{w}$  olettaa, että yhtälö

$$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w}$$

olisi hyvin määritelty? Todista se niiden oletusten vallitessa oikeaksi tai vääräksi.

5. Tarkastellaan suoraa  $\ell$ , joka on vektorin  $\mathbf{d} = (1, 1, -1)^T$  suuntainen ja kulkee pisteen  $\mathbf{P} = (1, 0, 1)^T$  kautta. Olkoon tason  $\mathcal{T}$  yhtälö  $3x + 2y - z = 8$ . Onko suora  $\ell$  tason  $\mathcal{T}$  kanssa yhdensuuntainen, kohtisuorassa tasoa vastaan tai leikkaavatko taso ja suora muuten, ja jos leikkaavat, niin missä pisteessä?

**EI LASKIMIA – EI KIRJALLISUUTTA!**