MAT-10444 Insinöörimatematiikka D4 u

Tentti 14.5.2012

- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ pintaa

$$z = f(x, y) = x^2 + x + xy + y^2 + \frac{3}{10}$$

Pinnan pisteeseen $(1, 1, f(1, 1))$ asetetaan pallo ja pallon annetaan vieriä vapaasti pintaa pitkin.

a) Mihin suuntaan pallo lähtee vierimään? Anna vastaus $xy-$tason vektorina. Mikä on pinnan vähenemisnopeus (=tangentin kulmakerroin) tähän vierimissuuntaan?

b) Olkoon $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pallon reitti ajan funktiona. Onko pallon reitillä ainakin yksi kohta, jolloin $z(t) = 0$?
Vihje: Älä edes yritä määrittää pallon reittiä vaan tutki reitin päätepistettä.

2. a) Yhdistetyistä funktioista $F \circ G$ ja $G \circ F$ vain toinen voidaan muodostaa. Muodosta se ja laske sen derivaattamatriisi, kun

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} xy \\ y^2 \\ x^2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = \begin{bmatrix} y \\ z \\ xy \end{bmatrix}$$

b) Mikä on **a)**-kohdan yhdistetyn funktion linearisointi pisteessä $x = 1, \ y = 1$?

3. Mitkä ovat funktion $f(x, y, z)$ kriittiset pisteet? Tutki Hessen matriisin avulla, ovatko kriittiset pisteet minimi-, maksimi- vai satulapisteitä.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + 3y^2 + \frac{3}{2}z^2 - 3xz + 2z$$

4. Kun levymäisen kappaleen S pinta-tiheys on $\delta(x, y)$, voidaan kappaleen massa m laskea kaavalla

$$m = \iint_S \delta(x, y)\, dy\, dx$$

a) Olkoon kappale S neliö $S = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$ ja levyn pintatiheys $\delta(x, y) = x$. Kappale S jaetaan kahteen osaan S_1 ja S_2 suoralla $y = ax$, missä a on vakio ja $a \in [0, 1]$.
Millä vakion a arvolla osien S_1 ja S_2 massat ovat yhtäsuuret?

b) Olkoon kappale S ympyrälevyn osa $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, \ x \ge 0, \ y \ge 0\}$ ja pintatiheys $\delta(x, y) = x$. Myös nyt kappale jaetaan suoralla $y = ax, \ a \in [0, 1]$ kahteen, massaltaan yhtäsuureen osaan S_1 ja S_2. Mikä tässä tapauksessa on vakion a arvo?

MAT-10444 Insinöörimatematiikka D 4u
Kaavakokoelma

1.

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.

$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.

$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.

$$\iint_R f(x, y)\ dx\ dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr\ d\theta$$

10.

$$\iiint_T f(x, y, z)\ dV = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\theta\ d\phi$$

11.

$$m = \iiint_T \delta\ dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\delta\ dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\delta\ dV$$

12.

$$\iint_A f(x, y)\ dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|\ du\ dv$$

13.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.

$$\int f'(g(t))g'(t)\ dt = f(g(t)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\ dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ dx + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \ln|f(x)| + C$$