Insinöörimatematiikka C 4u (Vehmanen)

Tentti 24.10.2011

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Olkoon $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Tutki (erotusosamäärän raja-arvona), onko derivaatta $f_x(0, 0, 0)$ olemassa.

b) Laske osittaisderivaatta $f_x(\mathbf{x})$, kun $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

c) Tutki, onko osittaisderivaatalla $f_x(\mathbf{x})$ raja-arvo origossa.

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \| \mathbf{x} \|^2 = \mathbf{x} \bullet \mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$. Laske suunnattu derivaatta yksikkövektorin $\mathbf{e}$ suuntaan pisteessä $\mathbf{e}$ määritelmän mukaisesti eli laske raja-arvo

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{e}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{e} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{e})}{h}$$

3. Olkoon P origokeskisen a-säteisen pallon $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ se neljännes, jossa $y \geq 0$ ja $z \geq 0$. **a)** Esitä <u>rajat</u> integraalille

$$\iiint_P yz\,dV = \int_?^? \int_?^? \int_?^? yz\,dz\,dy\,dx$$

b) Laske **a**-kohdan integraali vaihtamalla pallokoordinaatteihin.

4 a) Laske suorien $x = 0$, $y = x$, $y = k$ ja $y = 1/k$ (missä $k > 1$) rajoittaman joukon A_k yli integraali

$$\iint_{A_k} \frac{e^{-y}}{y}\,dxdy$$

b) Kun **a**-kohdassa annetaan $k \to \infty$, saadaan arvo integraalille

$$\int_?^{\infty} \int_?^? \frac{e^{-y}}{y}\,dx\,dy.$$

Mikä on tuon epäoleellisen integraalin <u>arvo</u> <u>ja</u> mitkä ovat <u>rajat</u>?

Käännä!

Tentin kaavaliite (periodi 4/2010–2011)

1. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$

2. $$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1D_1f(\mathbf{x}) & D_1D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1D_nf(\mathbf{x}) \\ D_2D_1f(\mathbf{x}) & D_2D_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2D_nf(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_nD_1f(\mathbf{x}) & D_nD_2f(\mathbf{x}) & \cdots & D_nD_nf(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

3. $$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

4. $$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(F(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

5. $$J_F(u,v,w) = \det(F'(u,v,w)) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

6. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \implies \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

7. $$m = \iiint_T \delta\,dV, \qquad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\delta\,dV, \qquad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\delta\,dV$$

8. $$\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$$

9. $$\sin^3 t = \sin t \sin^2 t = \sin t\,(1-\cos^2 t) = \sin t - \sin t \cos^2 t$$

$$\cos^3 t = \cos t \cos^2 t = \cos t\,(1-\sin^2 t) = \cos t - \cos t \sin^2 t$$