

MAT-10443 Insinöörimatematiikka C 4u / Hirvonen

Tentti 13.5.2013

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

HUOM! Kirjoita tehtävien 1 ja 2 vastaukset yhdelle konseptille ja tehtävien 3 ja 4 vastaukset toiselle. Konseptit kerätään eri pinoihin.

1. Tarkastellaan funktiota $f(x, y) = e^{3x} \sin y$.
 - (a) Ilmoita yksikkövektoreina kaikki ne suunnat, joihin funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(0, \frac{\pi}{4})$ on nolla.
 - (b) Määritellään lisäksi $x(u, v) = uv$ ja $y(u, v) = \frac{u}{v}$. Laske ketjusäännöllä osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ ja $\frac{\partial f}{\partial w}$.
2. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ suurin ja pienin arvo kolmiossa, jota rajoittavat koordinaattiakselit ja suora $y = 2 - x$.

HUOM! Kirjoita tehtävien 1 ja 2 vastaukset yhdelle konseptille ja tehtävien 3 ja 4 vastaukset toiselle. Konseptit kerätään eri pinoihin.

3. Laske integraali $\iint_A \frac{x}{y} dA$, kun joukkona A on kolmio, jonka kärkipisteet ovat origo, $(0, 2)$ ja $(2, 4)$.

Vihje: Integroimisjärjestys vaikuttaa nyt voimakkaasti integroinnin hankaluuteen.
4. (a) Kappaletta rajoittaa ylhäältä kartiopinta $x^2 + y^2 = z^2$ ja alhaalta xy -taso. Sivuilta sitä rajoittavat lieriö $x^2 + y^2 = 1$ ja xz -taso. Esitä kappaleen tilavuuden lauseke avaruusintegraalina sylinterikoordinaateissa ja laske integraalin arvo.
 - (b) Todista, ettei ole olemassa raja-arvoa $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy \cos x}{2x^2 + 2y^2}$.

Insinöörimatematiikka C 4u, kaavakokoelma

$$1. z = f(a, b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a, b) (x - a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a, b) (y - b)$$

$$2. T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$3. F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$4. (F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a})) G'(\mathbf{a})$$

$$5. D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) \mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

$$6. \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

$$7. \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$8. H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$9. \iint_R f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$10. \iiint_T f(x, y) dx dy = \iiint_U f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$11. \bar{m} = \iiint_T \delta dV, \bar{z} = \iiint_T z \delta dV, I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$$

$$12. \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_S f(F(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

$$13. \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

$$14. \sin^2 t = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t))$$

$$15. \int f'(g(x)) g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$