

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Olkoon  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

- a) Tutki (erotusosamäärän raja-arvona), onko derivaatta  $f_z(0, 0, 0)$  olemassa.
- b) Laske osittaisderivaatta  $f_z(\mathbf{x})$ , kun  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- c) Tutki, onko osittaisderivaatalla  $f_z(\mathbf{x})$  raja-arvo origossa.

2. Olkoon  $A$   $n \times n$ -matriisi, ja olkoon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ .

- a) Laske suunnattu derivaatta yksikkövektorin  $\mathbf{e}$  suuntaan pisteessä  $\mathbf{e}$  määritelmän mukaisesti eli laske raja-arvo

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{e}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{e} + h\mathbf{e}) - f(\mathbf{e})}{h}$$

- b) Muodosta ja sievennä kaavalla  $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{e}) = f'(\mathbf{e}) \mathbf{e}$  saatava suunnattu derivaatta, kun tiedetään, että  $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A+A^T)$  ja että  $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T A^T \mathbf{x}$ .

3. Olkoon  $P$  origokeskisen  $a$ -säteisen pallon  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$  se puolikas, jossa  $z \geq 0$ . a) Esitä rajat integraalille

$$\iiint_P xy \, dV = \int_{?}^? \int_{?}^? \int_{?}^? xy \, dz \, dy \, dx$$

- b) Laske a)-kohdan integraali vaihtamalla pallokoordinaatteihin.

- 4 a) Laske suorien  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = k$  ja  $x = 1/k$  (missä  $k > 1$ ) rajoittaman joukon  $A_k$  yli integraali

$$\iint_{A_k} \frac{e^{-x}}{x} \, dy \, dx$$

- b) Kun a)-kohdassa annetaan  $k \rightarrow \infty$ , saadaan arvo integraalille

$$\int_{?}^{\infty} \int_{?}^? \frac{e^{-x}}{x} \, dy \, dx.$$

Mikä on tuon epäoleellisen integraalin arvo ja mitkä ovat rajat?

**Käännä!**



## Tentin kaavaliite (periodi 4/2010–2011)

---

1.  $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T Hf(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2. 
$$Hf(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

3. 
$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

4. 
$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(F(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

5. 
$$J_F(u, v, w) = \det(F'(u, v, w)) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

6. 
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \implies \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$$

7.  $m = \iiint_T \delta dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \delta dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$

8.  $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

9.  $\sin^3 t = \sin t \sin^2 t = \sin t (1 - \cos^2 t) = \sin t - \sin t \cos^2 t$

$\cos^3 t = \cos t \cos^2 t = \cos t (1 - \sin^2 t) = \cos t - \cos t \sin^2 t$