

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Valmistaudutaan keksimään todistusta seuraavalle lauseelle:

jos funktiolla f on pisteessä p raja-arvo (olemassa) ja funktiolla g ei ole pisteessä p raja-arvoa (olemassa), niin silloin ei ole (olemassa myöskään) raja-arvoa

$$\lim_{x \rightarrow p} [f(x) + g(x)]$$

Kirjoita tuo jos-niin -lause toisin, totuusarvoltaan samana, käyttäen tietoa, että implikaatiot $p \Rightarrow q$ ja $\neg q \Rightarrow \neg p$ ovat totuusarvoiltaan samat. (Tarkoitus on pohjustaa epäsuoraa todistusta ehkä helpompana vaihtoehtona. Tarvitset de Morgania $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.)

2. Olkoon $x > 0$ ja $f(x) = \sqrt{x}$. Laske raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(l'Hospitalin sääntöä ei saa käyttää tässä "0/0"-tilanteessa, koska ollaan vasta johtamassa derivaattaa, joka pitäisi jo tietää jos tuota sääntöä käytetään.)

3 a) Mitkä ovat funktioiden $f(x) = \operatorname{ar} \cosh x$ ja $g(x) = \operatorname{ar} \cosh (\cosh x)$ laajimmat määrittelyjoukot?

b) Laske $g(-2)$ käyttäen funktion $\cosh x$ parillisuutta ja tietoa

$$y = \operatorname{ar} \cosh x \Leftrightarrow x = \cosh y \wedge y \geq 0.$$

c) Laske $g'(-2)$ eli $Dg(x)$ kohdassa $x = -2$. Apuna ovat tarvittaessa

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad D \cosh x = \sinh x \quad D \operatorname{ar} \cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

4 a) Anna kompleksiluvun $z = -1/2 + j\sqrt{3}/2$ polaariesitys.

b) Luettele a-kohdan luvun neljännet juuret (lyhyesti, kaikki neljä).

c) Laske kaikkien neljän juuren summa (helpoiten xy -muodossa).