MAT-10353 Insinöörimatematiikka C5 (Vehmanen)

Tentti 16.11.2009

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1 a) Laske suorien $x = 0$, $y = x$, $y = k$ ja $y = 1/k$ (missä $k > 1$) rajoittaman puolisuunnikkaan A_k yli integraali

$$\iint_{A_k} \frac{e^{-y}}{y}\, dxdy$$

b) Kun **a**-kohdassa (ja sen tuloksessa) annetaan $k \to \infty$, saadaan arvo integraalille

$$\int_{?}^{\infty} \int_{?}^{?} \frac{e^{-y}}{y}\, dx\, dy.$$

Mikä on tuo integraalin arvo ja mitkä ovat integroimisrajat?

2. Olkoon P origokeskisen a-säteisen pallon $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ se puolikas, jossa $x \ge 0$. Laske integraali

$$\iiint_P x\, dxdydz$$

Aputulos, jota saa käyttää:

$$\int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) + C$$

3 a) Muodosta yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = t + \cos(t)$$

b) Muunna normaaliryhmäksi **a**-kohdan differentiaaliyhtälö.

4. Laske matriisimenetelmällä homogeeniselle normaaliryhmälle

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

ensin yleinen ratkaisu $\mathbf{x}(t)$ ja sitten alkuehdon $\mathbf{x}(0) = [0,1]^T$ toteuttava ratkaisu.

Käännä!

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{R_{uv}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint\limits_R \rho(x,y)\,da\,, \qquad J = \iint\limits_R d(x,y)^2\,\rho(x,y)\,da$$

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_R x\,\rho(x,y)\,da\,, \qquad y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x); \quad y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \;\text{ ja }\; \cos\phi = \frac{b}{A},\; \sin\phi = \frac{a}{A} \;\text{ eli }\; \phi = \arctan\frac{a}{b}\;(\pm\pi)$$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$

$$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x\,, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \;\text{ ja }\; B = \frac{p}{2\omega}$$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x},\; x e^{\lambda_1 x},\; x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\; x\,e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \;\ldots\;, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x,\; x\,e^{\alpha x}\sin\beta x\,, \;\ldots\;, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ......, $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .... $(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)); \quad F' = f\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

ville.lukkonen@tut.fi