MAT-10353 Insinöörimatematiikka C5 **(Vehmanen)**

Tentti 20.10.2008 – **Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**

1. Laske integraali

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\cos\theta} \sqrt{1-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

Aputulos, jota saa käyttää:

$$\int \sin^3\theta\, d\theta = \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\, d\theta = \int \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = -\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta + C$$

2. Laske tasojen $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ ja $z=0$ rajoittaman "pyramidin" P yli integraali $\iiint_P 1\, dv$ nimenomaan osoitetussa järjestyksessä:

a) $\int_?^? \int_?^? \int_?^? 1\; dx\, dz\, dy$ **b)** $\int_?^? \int_?^? \int_?^? 1\; dy\, dz\, dx$

3 Ratkaise alkuarvotehtävä

a) $x''(t) + 9x(t) = \cos(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$;

b) $x''(t) + 9x(t) = \cos(3t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

4. Laske homogeeniselle normaaliryhmälle $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ yleinen ratkaisu ja alkuehdon $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ toteuttava ratkaisu, kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriisin A ominaisarvoiksi tiedetään jo $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ ja vastaaviksi ominaisvektoreiksi $\mathbf{v}_1 = ?$, $\mathbf{v}_2 = [0,1,1]^T$, $\mathbf{v}_3 = [3,-2,1]^T$.

Käännä!

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint_R \rho(x,y)\,da\,, \qquad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$$

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_R x\,\rho(x,y)\,da\,, \qquad y_0 = \frac{1}{m} \iint_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x);\; y = e^{-A(x)}\left(\int f(x) e^{A(x)}\,dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \text{ ja } \cos\phi = \frac{b}{A},\ \sin\phi = \frac{a}{A} \text{ eli } \phi = \arctan\frac{a}{b}\ (\pm\pi)$$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2 e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$

$$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x\,, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \text{ ja } B = \frac{p}{2\omega}$$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x},\ x e^{\lambda_1 x},\ x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta,\ \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ......, $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t));\ F' = f\,, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$