Insinöörimatematiikka X 5

Tentti 08.12.2009

Ei laskimia, taulukkokirjoja tai muuta kirjallisuutta. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

1. Funktion $f(x, y) = 3y - 2xy + 1$ integraali on 0 kolmiossa, jonka kärkipisteinä ovat $(0, 2)$, $(-2, 0)$ ja $(0, 2a)$. Mitä arvoja a voi saada?

2. Olkoon B origokeskinen k-säteinen pallo.

   (a) Laske integraali pallokoordinaateissa annetulle funktiolle $e^{-\rho^3}$ integrointialueena B.

   (b) Laske

   $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz.$$

   Vihje: Koko avaruutta $\mathbb{R}^3$ voidaan pitää äärettömän suurena origokeskisenä pallona.

3. Olkoon y muuttujan x funktio. Ratkaise differentiaaliyhtälö

   $$y'' + 3y' + y = x^2 + 3x + 1.$$

4. Olkoot x ja y muuttujan t funktioita. Mikä on differentiaaliyhtälöparin

   $$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

   ratkaisu alkuarvoilla $x(0) = 1$, $y(0) = 2$?

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$

2. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$

3. $m = \iint_R \rho(x,y)\,da$, $\quad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$

$x_0 = \dfrac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,da$, $\quad y_0 = \dfrac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,da$

4. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$

5. $\dfrac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x)$; $\; y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right)$, $\; A'(x) = a(x)$

6. $y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$

$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

7. $a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$

$A = \sqrt{a^2 + b^2}$ ja $\cos\phi = \dfrac{b}{A}$, $\sin\phi = \dfrac{a}{A}$ eli $\phi = \arctan\dfrac{a}{b}$ $(\pm\pi)$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$

$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x$, $\quad A = -\dfrac{q}{2\omega}$ ja $B = \dfrac{p}{2\omega}$

10. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$

(i) <u>yksinkertainen reaalijuuri</u> λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) <u>yksinkertainen imaginaarijuuripari</u> $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) <u>k–kertainen reaalijuuri</u> λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, $x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) <u>k–kertainen imaginaarijuuripari</u> $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\; x e^{\alpha x}\cos\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $\; x e^{\alpha x}\sin\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\; \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ......, $\operatorname{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\operatorname{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t))$; $\; F' = f$, $\quad \int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$

$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$