MAT-10353 Insinöörimatematiikka C5 (Vehmanen)

Tentti 1.11.2010 **– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.**
– Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon P origokeskisen a-säteisen pallon $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ se puolikas, jossa $z \ge 0$. **a)** Esitä rajat integraalille

$$\iiint_P xyz\,dv = \int_?^? \int_?^? \int_?^? xyz\,dx\,dy\,dz$$

b) Laske **a**-kohdan integraali vaihtamalla pallokoordinaatteihin.

2 a) Laske suorien $y=0, y=x,\ x=k$ ja $x=1/k$ (missä $k>1$) rajoittaman puolisuunnikkaan A_k yli integraali

$$\iint_{A_k} \frac{e^{-x}}{x}\,dydx$$

b) Kun **a**-kohdassa annetaan $k \to \infty$, saadaan arvo integraalille

$$\int_?^\infty \int_?^? \frac{e^{-x}}{x}\,dy\,dx.$$

Mikä on tuon epäoleellisen integraalin arvo ja mitkä ovat rajat?

3 a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$x''(t) + 4x(t) = \cos(2t),\ x(0)=0,\ x'(0)=0.$$

b) Tarkista, että **a**-kohdan vastauksesi toteuttaa molemmat alkuehdot ja myös differentiaaliyhtälön.

4 a) Laske ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit matriisille

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Muodosta homogeeniselle normaaliryhmälle $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ yleinen ratkaisu, kun A on **a** -kohdan matriisi.

c) Muodosta normaaliryhmälle $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ alkuehdon $\mathbf{x}(0) = [3,2]^T$ toteuttava ratkaisu, kun A on **a** -kohdan matriisi.

Käännä!

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint_R \rho(x,y)\,da, \qquad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$$

$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,da, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x); \quad y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ ja } \cos\phi = \frac{b}{A}, \ \sin\phi = \frac{a}{A} \text{ eli } \phi = \arctan\frac{a}{b} \ (\pm\pi)$$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2 e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$

$$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \text{ ja } B = \frac{p}{2\omega}$$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x}, \ x e^{\lambda_1 x}, \ x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x, \ x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ldots, \ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, \ x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ \ldots, \ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ......, $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)); \quad F' = f, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$