MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4

Tentti 9.4.2010

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**
- **Vastaa jokainen tehtävä omalle konseptipaperille.**

---

1. Muodosta funktion $f(x) = e^{-x^2}$ Maclaurinin sarjakehitelmä.
Laske tätä hyväksikäyttäen sadasosan tarkkuudella integraalin

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

arvo. Perustele ratkaisusi.

2. Tutkitaan käyrää

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 - 2t,\ \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}\right),\quad t \geq 0$$

a) Pisteessä A käyrä kulkee y-akselin suuntaisesti ja pisteessä B käyrä leikkaa suoran $x = 8$. Mitkä ovat pisteet A ja B?

b) Määritä käyrän pituus pisteiden A ja B välillä.

3. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$$

a) Laske funktion $f(x, y)$ raja-arvo origossa, jos raja-arvo on olemassa.
b) Laske **ketjusäännöllä** yhdistetyn funktion $(f \circ \mathbf{g})$ derivaatta. Sievennä vastaus mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Laita laskut näkyviin.
Kaavoja: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

4. Mikä on funktion $f(x, y) = -x^2 + 2y^2 - 4y$ pienin ja suurin arvo suljetussa ja rajoitetussa puoliympyräjoukossa $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4 - x^2,\ -2 \leq x \leq 2\}$ Missä $xy-$tason pisteissä nämä saavutetaan?

MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4
Kaavakokoelma

(1) d'Alembert: $\lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : \quad \mathrm{R} = \lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

(3) $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

(4) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

(5) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ on a:n ja x:n välissä.

(6) **Maclaurin sarjoja**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots, \quad (|x| \le 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \cdots, \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots \quad (|x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

(7) $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

(8) $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$

(9) $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\|$

(10) $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

(11) $$\mathbf{f}\,'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

(12) $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}\,'(\mathbf{x})$

(13) $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}$

(14) $\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

(15) $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

(16) Ääriarvokohdassa $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \ldots$

(17) $$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$$

(18) $$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$$