

# MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4

Tentti 22.3.2007

- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
  - Laske tehtävät 1 ja 2 yhdelle konseptipaperille ja tehtävät 3 ja 4 toiselle konseptipaperille.
- Jätä konseptipaperit eri pinoihin.
- 

1. Tutkitaan käyrää

$$\mathbf{r}(t) = \left( t^2 - 2t, \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} \right), \quad t \geq 0$$

Määritä käyrän pituus pisteestä  $A$ , jossa käyrä kulkee  $y$ -akselin suuntaisesti, pisteeseen  $B$ , jossa käyrä leikkaa suoran  $x = 8$ .

Mitkä ovat pisteet  $A$  ja  $B$ ?

2. Määritä raja-arvot tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa

$$\text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

3. a) Määritä ketjusäännöllä  $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(x, y, z)$ , kun

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}(x, y) = (2x^2 + y, -x + y^3, y)^T$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(x, y, z) = (x + 2y, \ln(z))^T$$

b) Määritä funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : h(x, y, z) = e^x + \sin(yz)$$

kasvunopeus pisteessä  $(x_0, y_0, z_0)^T = (1, 1, 0)^T$  origoa  $(0, 0, 0)^T$  kohti.

4. Määritä funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2y$$

ääriarvokohdat ja määrää niiden laatu, jos mahdollista, Hessen matriisin avulla.

---

Kääntöpuolella kaavakokoelma

$$\textcircled{1} \quad \underline{r}(t) = (t^2 - 2t, \frac{8}{3} t^{3/2}) , \quad t \geq 0$$

Pisteessä A käyrän y-akselin  
suuntainen eli  $y$ -akselin  
tällöin

$$\underline{r}'(t) = (2t - 2, 4t^{1/2}) \parallel (0, 1)$$

$$2t - 2 = 0 , \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = (-1, \frac{8}{3})$$

tällöin  $4t^{1/2} \neq 0$

Pisteessä B = käyrän leikkaus  
suoran  $x = 8$  ,

$$\text{niin} \quad t^2 - 2t = 8$$

$$(1) \quad t^2 - 2t - 8 = 0 , \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = 1 \pm 3$$

$t \geq 0$

$$t = 4 , \quad \underline{B} = (8, \frac{8}{3} \cdot 4^{3/2}) = \underline{(8, \frac{64}{3})}$$

Käyrän pituus

$$s = \int_1^4 \|\underline{r}'(t)\| dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(2t-2)^2 + (4\sqrt{t})^2} dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 16t} dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(2t+2)^2} dt$$

$$= \int_1^4 (2t+2) dt = \left[ t^2 + 2t \right]_1^4$$

$$= 16 + 8 - 1 - 2 = \underline{\underline{21}}$$

$$\textcircled{2.} \quad a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

esim. suoralla  $y = x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

ja suoralla  $y = -x$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2}{x^2+(-x)^2} = -\frac{1}{2}$$

} ei raja-  
arvo

}  $\Rightarrow$  ei raja-  
arvoa  
origossa

$$b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ei lähestymistavoilla saadaan  
raja-arvoa aina  $= 0$

Osoitetaan, että raja-arvo on  $= 0$

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{xy}{|x|} \right| = |y| \rightarrow 0,$$

kun vain  $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow$  raja-arvo on  $0 \quad \square$

$$\textcircled{3} \text{ a) } \underline{g}(x, y) = (2x^2 + y, -x + y^3, y)^T$$

$$\underline{f}(x, y, z) = (x + 2y, \ln z)$$

$$(\underline{g} \circ \underline{f})'(\underline{x}) = \underline{g}'(\underline{f}(\underline{x})) \cdot \underline{f}'(\underline{x}) = \underline{e}_1$$

$$\underline{g}'(x, y) = \begin{bmatrix} 4x & 1 \\ -1 & 3y^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 4(x+2y) & 1 \\ -1 & 3(\ln z)^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(x+2y) & 8(x+2y) & 1/z \\ -1 & -2 & 3(\ln z)^2/z \\ 0 & 0 & 1/z \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } h(x, y, z) = e^x + \sin(yz)$$

$$h'(x, y, z) = [e^x, z \cos(yz), y \cos(yz)]$$

$$\text{piste } (x_0, y_0, z_0)^T = (1, 1, 0)^T$$

$$\text{suunta origoon } (-1, -1, 0)^T \Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -1, 0)^T$$

$$D_{\underline{u}} h(1, 1, 0) = h'(1, 1, 0) \underline{u}$$

$$= [e, 0, 1] \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [-1, -1, 0]^T = \frac{-e}{\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{4.} \quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2y$$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x - 4xy \\ 4y + 8 - 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}$$

$$1) \quad 4x(1-y) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix} \quad \text{tai}$$

$$x=0 \xrightarrow{2)} \quad 4y + 8 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$y=1 \xrightarrow{2)} \quad 4 + 8 - 2x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y=1 \Rightarrow 2x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

3 kriittistä pistettä

$$(0, -2), (\sqrt{6}, 1), (-\sqrt{6}, 1)$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 4 - 4y & -4x \\ -4x & 4 \end{bmatrix}$$

$$H(0, -2) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{pos det} \\ \text{minimi} \end{matrix}$$

$$H(\sqrt{6}, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det(H(\sqrt{6}, 1)) < 0 \\ \text{sattulapiste} \end{matrix}$$

$$H(-\sqrt{6}, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \det(H(-\sqrt{6}, 1)) < 0 \\ \text{sattulapiste} \end{matrix}$$