MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4

Tentti 20.3.2009

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**
- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle ja tehtävät 3-4 toiselle konseptille.**

---

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia (T) vai epätosia (E). Rajaa vastauspaperiin 6×2–ruudukko ja rastita vastauksesi viereisen mallin mukaisesti. Mitään perusteluja ei tarvita.
Arvostelu: Vastaus oikein = 1 piste, vastaus väärin = −1 piste, ei vastausta = 0 pistettä. Tehtävän kokonaispisteet kuitenkin ≥ 0.

	T	*E*
a)		
b)	×	
c)		
d)	×	
e)		×
f)		×

a) Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ on hajaantuva.
b) Käyrillä $\mathbf{r}_1(t) = (\cos(t),\ \cos(t))$ $t \in [0, 2\pi]$ ja $\mathbf{r}_2(t) = (\sin(t),\ \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ on sama jälki.
c) Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ on differentioituva
d) c)-kohdan funktion kuvaajan saa piirrettyä MAPLElla komennoilla

```
> with(plots):
> plot3d(sqrt(x^2+y^2+1),x=[-2,2],y=[-2,2]);
```

e) Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, niin $(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})$ voidaan muodostaa ja sen derivaatta on 5×3-matriisi.
f) Differentioituvan funktion lokaalissa ääriarvokohdassa kaikki suunnatut derivaatat ovat = 0.

2. a) Käyrillä

$$\mathbf{r}_1(t) = \left(t^2 - t,\ 2t\right) \quad \text{ja} \quad \mathbf{r}_2(s) = \left(-s^2 + 3,\ 3s + 1\right)$$

on kaksi leikkauspistettä. Mitkä ne ovat?

b) Osoita, että käyrät leikkaavat toisensa kohtisuorasti (= käyrien tangentit ovat kohtisuorassa) kummassakin a)-kohdan pisteessä.

Tehtävät 3 ja 4 kääntöpuolella.

3. a) Laske integraalille likiarvo käyttäen toisen asteen Maclaurinin polynomia

$$\int_0^1 e^{\sin(x)}\, dx$$

b) Laske yhdistetyn funktion $g \circ \mathbf{f}$ derivaatta pisteessä $(2, 1)$, kun

$$\mathbf{f}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{u^2}{2} - v \\ u + v^2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad g(x, y) = x^y$$

Vihje: Ketjusääntö, $\frac{\partial}{\partial y} x^y = \ln(x) x^y$

4. Mikä on funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x - y$$

suurin ja pienin arvo joukossa

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Vihje: Ääriarvot joukon reunapisteissä saadaan Lagrangen menetelmällä.

MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4
Kaavakokoelma

---

(1) d'Alembert: $\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k: \quad \mathrm{R} = \lim\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$

(3) $P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

(4) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

(5) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ on a:n ja x:n välissä.

(6) **Maclaurin sarjoja**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots, \quad (|x| \leq 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \cdots, \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots \quad (|x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

(7) $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

(8) $\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$

(9) $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\|$

(10) $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

(11) $\mathbf{f}\,'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

(12) $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}\,'(\mathbf{x})$

(13) $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}$

(14) $\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

(15) $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

(16) Ääriarvokohdassa $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \ldots$

(17) $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$

(18) $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$