MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4

Tentti 14.5.2009

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia (T) vai epätosia (E). Rajaa vastauspaperiin viereisen mallin mukainen 6×2–ruudukko ja rastita vastauksesi siihen. Mitään perusteluja ei tarvita.
Arvostelu: Vastaus oikein = 1 piste, vastaus väärin = -1 piste, ei vastausta = 0 pistettä. Tehtävän kokonaispisteet kuitenkin ≥ 0.

	T	*E*
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		
f)		

a) Funktion $f(x) = \arctan(x)$ 3-asteen Maclaurinin polynomi on $x + x^3$.
b) Käyrä $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1,\ t - 1,\ t + 1)$ kulkee origon kautta.
c) Käyrän $\mathbf{r}(t) = (3t,\ 4t),\ t \in [0, 1]$ kaaren pituus = 5.
d) Funktio $f(x, y) = 3x^2y - y^3$ toteuttaa ns. Laplacen yhtälön $f_{xx} + f_{yy} = 0$.
e) Origo on funktion $f(x, y) = yx^2 + xy^2$ kriittinen piste.
f) Hessen matriisi kriittisessä pisteessä $H(\mathbf{x}_0)$ on aina positiivisesti definiitti, negatiivisesti definiitti tai indefiniitti.

2. Tutkitaan käyrää

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 - 1,\ t^3 - t\right)$$

a) Käyrä leikkaa x-akselin kolme kertaa. Mitkä ovat nämä leikkauspisteet?
b) Muodosta tangenttisuorat kaikissa kolmessa a)-kohdan pisteessä. Nämä tangenttisuorat rajaavat kolmion. Mitkä ovat tämän kolmion kärkipisteet?

3. a) Tutki funktion $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ differentiaalia pisteessä $(1, 1)$ ja laske sen avulla likiarvo luvulle $e^{0.4} = e^{1.1^2 - 0.9^2}$.

b) Olkoon lämpötila ($^\circ C$) avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteessä (x, y, z) annettu kaavalla $T(x, y, z) = 100 - x^2 - yz$, pituusyksikkönä metri. Mikä on lämpötilan muutosnopeus, kun siirrytään pisteestä $(-1, 2, 3)^T$ suuntaan $\mathbf{v} = (-12, 3, 4)^T$?

4. Määrää funktion $f(x, y)$ kriittiset pisteet ja tutki, ovatko ne minimi-, maksimi- vai satulapisteitä.

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2xy - y^2$$

MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4
Kaavakokoelma

(1) d'Alembert: $\lim \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : \quad \mathrm{R} = \lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$

(3) $\displaystyle P_n(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

(4) $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

(5) $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, ξ on a:n ja x:n välissä.

(6) **Maclaurin sarjoja**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots, \quad (|\,x\,| \le 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \cdots, \quad (-1 < x \le 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \cdots \quad (|\,x\,| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R})$$

(7) $\displaystyle s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$

(8) $\dfrac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0$

(9) $\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\|$

(10) $\kappa(t) = \dfrac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$

(11) $$\mathbf{f}\,'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

(12) $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\,'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}\,'(\mathbf{x})$

(13) $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{u}$

(14) $\nabla f(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

(15) $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$

(16) Ääriarvokohdassa $\Delta = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0, \ldots$

(17) $\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g = \mathbf{0} \end{cases}$

(18) $\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \nabla f + \lambda \nabla g + \mu \nabla h = \mathbf{0} \end{cases}$