MAT-10343 Insinöörimatematiikka C4

Tentti 22.3.2007

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Laske tehtävät 1 ja 2 yhdelle konseptipaperille ja tehtävät 3 ja 4 toiselle konseptipaperille. Jätä konseptipaperit eri pinoihin.**

---

1. Tutkitaan käyrää

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 - 2t,\ \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}\right), \quad t \geq 0$$

Määritä käyrän pituus pisteestä A, jossa käyrä kulkee y-akselin suuntaisesti, pisteeseen B, jossa käyrä leikkaa suoran $x = 8$.
Mitkä ovat pisteet A ja B?

2. Määritä raja-arvot tai osoita, että raja-arvoa ei ole olemassa

$$\textbf{a)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \textbf{b)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

3. **a)** Määritä **ketjusäännöllä** $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(x, y, z)$, kun

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}(x, y) = (2x^2 + y,\ -x + y^3,\ y)^T$$

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(x, y, z) = (x + 2y,\ \ln(z))^T$$

b) Määritä funktion

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : h(x, y, z) = e^x + \sin(yz)$$

kasvunopeus pisteessä $(x_0, y_0, z_0)^T = (1, 1, 0)^T$ origoa $(0, 0, 0)^T$ kohti.

4. Määritä funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2y$$

ääriarvokohdat ja määrää niiden laatu, jos mahdollista, Hessen matriisin avulla.

Kääntöpuolella kaavakokoelma

(1.) $\underline{r}(t) = (t^2 - 2t,\ \frac{8}{3} t^{3/2})$, $t \geq 0$

Pisteessä A käyrä y-akselin suuntainen eli tällöin

$\underline{r}'(t) = (2t-2,\ 4t^{1/2}) \parallel (0,1)$

$2t - 2 = 0$, $t = 1$ jolloin $4t^{1/2} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A = (-1, \frac{8}{3})}}$

Pisteessä B käyrä leikkaa suoran $x = 8$,

siis $t^2 - 2t = 8$

(1) $t^2 - 2t - 8 = 0$, $t = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = 1 \underset{(-)}{+} 3$

$t \geq 0$

$t = 4$, $B = (8, \frac{8}{3} \cdot 4^{3/2}) = \underline{\underline{(8, \frac{64}{3})}}$

Käyrän pituus

$$s = \int_1^4 \|\underline{r}'(t)\| dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(2t-2)^2 + (4\sqrt{t})^2}\, dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{4t^2 - 8t + 4 + 16t}\, dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{(2t+2)^2}\, dt$$

$$= \int_1^4 2t + 2\, dt = \Big/_1^4\, t^2 + 2t$$

$$= 16 + 8 - 1 - 2 = \underline{\underline{21}}$$

2. a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

esim. suoralla $y = x$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$

ja suoralla $y = -x$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2}{x^2+(-x)^2} = -\frac{1}{2}$

eri raja-arvot $\Rightarrow$ ei raja-arvoa origossa

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

eri lähestymistavoilla saadaan raja-arvoksi aina $= 0$

Osoitetaan, että raja-arvo on $= 0$

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

$$\leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2}} \right| = \left| \frac{xy}{|x|} \right| = |y| \to 0,$$

kun vain $(x,y) \to (0,0)$

$\Rightarrow$ raja-arvo on 0 $\square$

4. $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 8y - 2x^2 y$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 4x - 4xy \\ 4y + 8 - 2x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}$$

1) $4x(1-y) = 0 \Rightarrow x = 0$ tai $y = 1$

$x = 0 \overset{2)}{\Rightarrow} 4y + 8 = 0 \Rightarrow y = -2$

$y = 1 \overset{2)}{\Rightarrow} 4 + 8 - 2x^2 = 0$

$2x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$

3 kriittistä pistettä

$(0,-2)$, $(\sqrt{6}, 1)$, $(-\sqrt{6}, 1)$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 4 - 4y & -4x \\ -4x & 4 \end{bmatrix}$$

$H(0,-2) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ pos def $\Rightarrow$ minimi

$H(\sqrt{6},1) = \begin{bmatrix} 0 & -4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} & 4 \end{bmatrix}$ $\det(H(\sqrt{6},1)) < 0$ satulapiste

$H(-\sqrt{6},1) = \begin{bmatrix} 0 & 4\sqrt{6} \\ 4\sqrt{6} & 4 \end{bmatrix}$ $\det(H(-\sqrt{6},1)) < 0$ satulapiste