MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3

Tentti 13.3.2009

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**

---

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia (T) vai epätosia (E). Rajaa vastauspaperiin 6×2–ruudukko ja rastita vastauksesi viereisen mallin mukaisesti. Mitään perusteluja ei tarvita.
Arvostelu: Vastaus oikein = 1 piste, vastaus väärin = −1 piste, ei vastausta = 0 pistettä. Tehtävän kokonaispisteet kuitenkin ≥ 0.

	T	E
a)		
b)	$\times$	
c)		
d)		$\times$
e)		$\times$
f)	$\times$	

a) $(e^{-3\ln(2)})^{-1} = \ln(e^8)$
b) Funktiolla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{-2x}$ on käänteisfunktio. ($\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$)
c) Jos $\lim f(x)$ on muotoa $\infty - \infty$, niin raja-arvolaskun vastaus on aina $= 0$
d) Funktion $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ derivaatta $f'(x) = -\frac{1}{x}$
e) Integraalifunktio $\int \sin(x^2)\, dx = -\frac{\cos(x^2)}{2x} + C$
f) $\cosh(x) > \sinh(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$

2. **a)** Funktio $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ on aidosti kasvava määrittelyjoukossaan.
Mikä on tämä laajin mahdollinen määrittelyjoukko?
Mikä on tällöin funktion arvojoukko? Perustele vastauksesi.
Vihje: Tutki funktion raja-arvoja määrittelyjoukon reunapisteissä. $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$.

b) Mitä on $f^{-1}(\ln(2))$ ja $(f^{-1})'(\ln(2))$?

3. Suppeneeko epäoleellinen integraali ja jos suppenee, niin mikä on sen arvo

$$\int_0^\infty xe^{-2x}\, dx$$

4. Suppenevatko sarjat

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

$\longrightarrow$

MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3
Kaavakokoelma

---

(1) $$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (g(x) \neq 0)$$

(2) $$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad f^{-1}(x) = y$$

(3) $$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$$

(5) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

(6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C \quad (|x| < 1)$$

(7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

(8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (x > 1)$$

(9) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) + C\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C & (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth}(x) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) + C & (|x| > 1) \end{cases}$$

(10) $$\int f'(g(t))g'(t)\, dt = f(g(t)) + C$$

(11) $$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx$$

(12) $$\text{kaaren pituus } = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

(13) $$\text{ala } = 2\pi \int_a^b |\, f(x)\, |\, \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

(14) $$\text{tilavuus } = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

(15) $$\text{ala } = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta$$

(16) $$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(17) $$\text{d'Alembert: } \lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c$$