

MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3

Tentti 30.1.2009

- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.

1. Seuraaviin kysymyksiin on yksi tai useampia oikeita vastauksia. Rajaa vastauspaperiin 6×6 -ruudukko ja rasti vastauksesi viereisen mallin mukaisesti. Mitään perusteluja ei tarvita.

	A	B	C	D	E	F
1		×				
2	×					
3						×
4		×		×		
5	×					
6		×	×	×		

Arvostelu: Yhden kysymyksen kaikki oikeat vaihtoehdot on valittu = 1 piste.

Kysymykset

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$. Mitkä väitteistä ovat tosia? Funktio f on ...
2. Oletetaan, että $\lim f(x)$ on $\frac{0}{0}$ -muotoa. Mikä on raja-arvolaskun vastaus?
3. Mikä on funktion $f(x) = xe^{2x}$ derivaatta $f'(x)$?
4. Mitä on $\arccos(-1)$? ($\arccos(x)$:n päähaara.)
5. Mikä on funktion $f(x) = e^{x^2}$ integraalifunktio?
6. Mitkä väitteistä ovat tosia sarjalle $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. S tarkoittaa sarjan summaa ja S_n sarjan n .ttä osasummaa. Sarja on ...

Vastausvaihtoehdot

	A	B	C	D	E	F
1.	polynomi	vähenevä	jatkuva	$f(-1) = 0$	$f^{-1}(10) = 2$	$f'(1) = 2$
2.	aina 0	voi olla 0	aina 1	voi olla 1	voi olla ∞	vastausta ei voi koskaan laskea
3.	x^2e^{2x}	$2e^{2x}$	$e^{2x} + 2xe^{2x}$	$\frac{1}{2}e^{2x}$	$2x + e^{2x}$	Ei mikään A-E
4.	$-\pi$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	Ei mikään A-E
5.	$2e^x + C$	$2e^{x^2} + C$	$\ln(x^2) + C$	$\frac{1}{2}e^{2x} + C$	$2xe^{x^2} + C$	Ei mikään A-E
6.	geometrinen	harmoninen	suppeneva	hajaantuva	$S_{10} < 10$	$S < 10$

Tehtävät 2-4 kääntöpuolella.

2. Tutkitaan funktiota

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x|}{\sinh(x)}$$

a) Onko raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

olemassa ja jos on, niin mikä on sen arvo?

b) Tiedetään, että $f(\ln(2)) = \frac{4}{3} \ln(2)$. Mitä on

$$Df^{-1} \left(\frac{4}{3} \ln(2) \right) = (f^{-1})' \left(\frac{4}{3} \ln(2) \right)$$

eli **käänteisfunktion derivaatta** pisteessä $x = \frac{4}{3} \ln(2)$.

Sievennä vastaus mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

3. Laske sopivaa sijoitusta ja osamurtokehitystä käyttäen integraali.

Sievennä vastaus mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x})} dx$$

4. a) Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{4x - 1}{x^2 + 1} dx$$

b) Suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k - 1}{k^2 + 1}$$

Voit käyttää a)-kohdan tulosta tai ratkaista tehtävän muulla tavoin.

MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3
Kaavakokoelma

$$(1) \quad D \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(2) \quad Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad f^{-1}(x) = y$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$$

$$(5) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C \quad (|x| < 1)$$

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (x > 1)$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) + C \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + C & (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right) + C & (|x| > 1) \end{cases}$$

$$(10) \quad \int f'(g(t))g'(t) dt = f(g(t)) + C$$

$$(11) \quad \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

$$(12) \quad \text{kaaren pituus} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$(13) \quad \text{ala} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$(14) \quad \text{tilavuus} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$(15) \quad \text{ala} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta$$

$$(16) \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(17) \quad \text{d'Alembert: } \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c$$