

MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3

Tentti 14.3.2008

- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
 - Kääntöpuolella kaavakokoelma
-

1. a) Osoita, että funktiolla $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 4$ on käänteisfunktio koko määrittelyjoukossaan.

b) Mitä on $(f^{-1})'(4)$ (käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatan arvo kohdassa $x = 4$)?

2. Funktio $y = f(x) = \cosh(x)$ kuvaa vapaasti päätepisteistään riippuvaa ketjua. Kun päätepisteet ovat suoralla $y = 3$, niin kuinka pitkä ketju on?

Vihjeitä: Ketju on symmetrinen y -akselin suhteen, kannattaa laskea ketjun puolikkaan pituus ja kertoa se kahdella.

$$D(\sinh(x)) = \cosh(x), \quad D(\cosh(x)) = \sinh(x), \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

3. Suppeneeko epäoleellinen integraali ja jos suppenee, niin mikä on sen arvo

$$\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$$

4. Määritellään lukujono (a_k) rekursiivisesti

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \text{ja} \quad a_k = a_{k-1} \cdot a_{k-2}, \quad k \geq 3$$

ja muodostetaan tästä kaksi sarjaa

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$$

a) Osoita suhdetestillä, että molemmat sarjat suppenevat.

b) Osoita, että sarjan S_1 summan arvo < 1 .

c) Osoita, että sarjan S_2 summan arvo $> \frac{1}{3}$.

Vihje:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1-q}{q}, \quad \text{kun } |q| < 1$$

**MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3
Kaavakokoelma 2007**

$$(1) \quad D \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (g(x) \neq 0)$$

$$(2) \quad Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad f^{-1}(x) = y$$

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$$

$$(4) \quad \int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x)$$

$$(5) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$$

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \quad (|x| < 1)$$

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x > 1)$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) & (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{x-1} \right) & (|x| > 1) \end{cases}$$

$$(10) \quad \int f'(g(t))g'(t) dt = f(g(t))$$

$$(11) \quad \int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

$$(12) \quad \text{kaaren pituus} = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$(13) \quad \text{ala} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx$$

$$(14) \quad \text{tilavuus} = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$(15) \quad \text{ala} = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\theta)^2 d\theta$$

$$(16) \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$(17) \quad \text{d'Alembert: } \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c$$

$$(18) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : \quad \mathbf{R} = \lim \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$