MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3

Tentti 5.5.2008

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. a) Onko funktio $f(x)$ jatkuva pisteessä $x = 0$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-2\cos(x)}{x^2} & \text{kun } x < 0 \\ \cosh(x) & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Osoita, että funktion arvojoukko $R_f = [\,0, \infty\,)$.
Perustele vastauksesi hyvin.

2. a) Mikä on tarkka arvo luvulle $\sin\left(\arccos(\frac{1}{3})\right)$?

b) Millä x:n arvolla $3\sinh(x) + \cosh(x) = 2$?

3. Laske integraalin arvo

$$\int_{-1}^{3} e^{\sqrt{x+1}}\, dx$$

Vihje: Sijoitus $t = \sqrt{x+1}$, osittaisintegrointi.

4. Suppenevatko sarjat

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(k)}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$

MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3
Kaavakokoelma 2007

(1) $$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \quad (g(x) \neq 0)$$

(2) $$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(y)}, \quad f^{-1}(x) = y$$

(3) $$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x)$$

(5) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$$

(6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \quad (|x| < 1)$$

(7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

(8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x > 1)$$

(9) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) & (|x| < 1) \\ \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) & (|x| > 1) \end{cases}$$

(10) $$\int f'(g(t))g'(t)\, dt = f(g(t))$$

(11) $$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx$$

(12) $$\text{kaaren pituus} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

(13) $$\text{ala} = 2\pi \int_a^b |\, f(x)\, | \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

(14) $$\text{tilavuus} = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

(15) $$\text{ala} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta$$

(16) $$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(17) $$\text{d'Alembert: } \lim \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = c$$

(18) $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : \quad \mathrm{R} = \lim \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$