MAT-10333 Insinöörimatematiikka C3

Tentti 12.3.2007

- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**

1.a) Osoita, että funktiolla

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ :\ \ f(x) = \sqrt{x^2+5} + x$$

on käänteisfunktio $f^{-1}(x)$ osoittamalla, että $f(x)$ on aidosti kasvava funktio. (Huom. funktion arvojoukko on $\mathbb{R}_+$, sitä ei tarvitse osoittaa).
b) Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatan arvo, kun $x = 5$.

2.a) Millä $x \geq 0$ arvolla

$$2\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 5$$

b) Laske raja-arvo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{\operatorname{artanh}(x)}$$

3. Määritä integraalifunktio

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx$$

4.a) Tutki suppeneeko sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{e^k}$$

b) Kuinka monta termiä osasummaan tulisi ottaa, jotta sarjan summan arvo voitaisiin laskea osasumman avulla tarkkuudella 0.01. Perustelut.

Kaavoja ja joitakin arvoja, kääntöpuolella kaavakokoelma

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Eksponenttifunktion arvoja:

$$e^1 = 2.72,\ e^2 = 7.39,\ e^3 = 20.09,\ e^4 = 54.60,\ e^5 = 148.41,\ e^6 = 403.43$$

$$e^7 = 1096.63,\ e^8 = 2980.96,\ e^9 = 8103.08,\ e^{10} = 22026.47$$

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+5} + x$

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x\,(x^2+5)^{-1} + 1$

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} + 1 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} > -1$

Kun $x \geq 0$, $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \geq 0 > -1$, selvä

Kun $x < 0$ $\frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = \frac{-|x|}{\sqrt{x^2+5}} > -1$

$\Leftrightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+5}} < 1$,

sillä $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+5}$

Näin $f'(x) > 0$, f on aidosti kasvava, $f^{-1}(x)$ on olemassa

b) $f^{-1}(5) = x$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2+5} + x = 5$

On vain yksi ratkaisu.

$\sqrt{x^2+5} = 5-x \quad |\,()^2 \quad x^2+5 = 25-10x+x^2 \Rightarrow x = 2$

$(f^{-1})'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{9}}+1}$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$

(2) a) $2\cosh^2 x + \sinh^2 x = 5 \quad , x \geq 0$

$$\underbrace{2\cosh^2 x - 2\sinh^2 x}_{=2} + 3\sinh^2 x = 5$$

$$3\sinh^2 x = 3 \Rightarrow \sinh x = \pm 1$$

Koska $x > 0$, on $\sinh x > 0$ ja

$$x = \operatorname{arsinh}(1) = \ln(1+\sqrt{2})$$

TAI $\sinh x = 1$

$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = 1$$

$$e^x - e^{-x} = 2 \quad | \cdot e^x$$

$$(e^x)^2 - 1 - 2e^x = 0$$

$$e^x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \overset{+}{(-)} \sqrt{2}$$ – ei käy $e^x > 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \ln(1+\sqrt{2})}}$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan(x)}{\operatorname{artanh}(x)}$ $\underline{\text{"}0/0\text{"}}$ (sillä $\tan(0) = 0$ ja $\tanh(0) = 0$

$$\overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \underline{\underline{1}}$$

③

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx$$

$$= \int \frac{2}{e^x - e^{-x}}\, dx$$

sij $t = e^x \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{t}$

$x = \ln t$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$$= \int \frac{2}{t - \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \int \frac{2}{t^2 - 1}\, dt$$

Jaetaan osamurtoihin

$t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$

$\frac{2}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$

$= \frac{At + A + Bt - B}{t^2-1}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$

$$= \int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\, dt$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C$$

$$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right| + C$$

④ a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cos(k\pi)}{e^k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \underbrace{\frac{k}{e^k}}_{a_k}$

koska $\cos(k\pi) = \pm$, $k \in \mathbb{Z}$

Vuorotteleva sarja, käytetään Leibnizin testiä

1) $a_k = \frac{k}{e^k} \geq a_{k+1} = \frac{k+1}{e^{k+1}}$,

sillä $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{k}{e^k} \cdot \frac{e^{k+1}}{k+1} =$

$= \frac{e\,k}{k+1} \to e$, kun $k \to \infty$

2) $\lim a_k = \lim \frac{k}{e^k} = 0$,

sillä $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

TAI suhdetestillä

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)e^k}{k\,e^{k+1}}\right|$

$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$

$\Rightarrow$ suppenee itseisesti $\Rightarrow$ suppenee

b) Kun suppeneva vuorotteleva sarja korvataan osasummalla S_n, tehty virhe $|R_n| \leq |a_{n+1}|$

Nyt $\frac{6}{e^6} = \frac{6}{403} > \frac{1}{100}$, mutta

$\frac{7}{e^7} = \frac{7}{1096} < \frac{1}{100}$, $n+1 = 7$, $\underline{\underline{n = 6}}$