Insinöörimatematiikka C 2 (Vehmanen)

Tentti 29.11.2005 / sarja B

Antti Itäsalo
antti.itasalo@tut.fi

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Jokaisen tehtävän vastaus ERI PAPERILLE.

– Jokaiseen paperiin NIMESI ja OPISKELIJANUMEROSI.

1 a) Laske elementaarisia vaakarivimuunnoksia käyttäen redusoitu riviporrasmuoto kokonaismatriisille

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

b) Esitä tuon kokonaismatriisin tarkoittaman yhtälö(ryhmän)n $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut.

2. Yhtlöryhmälle

$$\begin{cases} 3y - 6z + 6u + 4v = -5 \\ 3x - 7y + 8z - 5u + 8v = 9 \\ 3x - 9y + 12z - 9u + 6v = 15 \end{cases}$$

on saatu ratkaisuksi

$$\begin{cases} x = 2s - 3t - 24 \\ y = 2s - 2t - 7 \\ z = s \\ u = t \\ v = 4 \end{cases}$$

Ratkaisut voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Osoita vektorit $[2, 2, 1, 0, 0]^T$, $[-3, -2, \overset{0}{\cancel{1}}, \overset{1}{\cancel{0}}, 0]^T$, $[-24, -7, 0, 0, 4]^T$ lineaarisesti riippumattomiksi.

b) Kuitenkaan ei sanota, että nuo kolme vektoria virittävät ratkaisujen $\mathbf{x}$ joukon. Syynä on, että ratkaisujen $\mathbf{x}$ joukko ei ole $\mathbb{R}^5$:n aliavaruus. Osoita, että ratkaisujen $\mathbf{x}$ joukko ei ole $\mathbb{R}^5$:n aliavaruus.

3 **a)** Laske kaikki ominaisarvot matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Laske ja esitä kuhunkin ominaisarvoon liittyvät kaikki ominaisvektorit.

c) Totea kuhunkin ominaisarvoon liittyvän omainaisavaruuden kanta ja dimensio.

4. Oletetaan, että $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat $n \times n$-matriisin Z ominaisarvot ja $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ ovat niihin liittyviä ominaisvektoreita, jotkat ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin on

$$[Z\mathbf{y}_1, Z\mathbf{y}_2, \dots, Z\mathbf{y}_n] = [\lambda_1\mathbf{y}_1, \lambda_2\mathbf{y}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{y}_n]$$

a) Onko yllä olevan yhtälön vasen puoli sama kuin ZY vai YZ, kun Y on matriisi $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$ (ja olettaen, että $ZY \neq YZ$)?

b) Onko yllä olevan yhtälön oikea puoli sama kuin LY vai YL, kun L on matriisi $L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (olettaen, että $LY \neq YL$)?

c) Mitkä seuraavista neljästä yhtälöstä ovat tosia **a**- ja **b**-kohtien vastaustesi perusteella:

$$ZY = LY, \quad YZ = LY, \quad ZY = YL, \quad YZ = YL\ ?$$

d) Kumpi matriiseista Y ja Z voidaan oletetun nojalla päätellä kääntyviksi, jos kumpikaan, vaiko molemmat?

e) Ratkaise **c**-kohdassa todeksi ilmoittamistasi yhtälöistä Z (jos se on mahdollista **d**-kohdan vastauksesi perusteella).

f) Ratkaise **c**-kohdassa todeksi ilmoittamistasi yhtälöistä L (jos se on mahdollista **d**-kohdan vastauksesi perusteella).