

Insinöörimatematiikka C 2

(Vehmanen)

Tentti 29.11.2005 / sarja B

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

– Jokaisen tehtävän vastaus ERI PAPERILLE.

– Jokaiseen paperiin NIMESI ja OPISKELIJANUMEROSI.

1 a) Laske elementaarisia vaakarivimuunnoksia käyttäen redusoitu rivi-porrasmuoto kokonaismatriisille

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

b) Esitä tuon kokonaismatriisin tarkoittaman yhtälö(ryhmän) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kaikki ratkaisut.

2. Yhtlöryhmälle

$$\begin{cases} 3y - 6z + 6u + 4v = -5 \\ 3x - 7y + 8z - 5u + 8v = 9 \\ 3x - 9y + 12z - 9u + 6v = 15 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{on saatu} \\ \text{ratkaisuksi} \end{array} \quad \begin{cases} x = 2s - 3t - 24 \\ y = 2s - 2t - 7 \\ z = s \\ u = t \\ v = 4 \end{cases}$$

Ratkaisut voidaan siis kirjoittaa muotoon

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

a) Osoita vektorit $[2, 2, 1, 0, 0]^T$, $[-3, -2, \overset{0}{1}, \overset{1}{0}, 0]^T$, $[-24, -7, 0, 0, 4]^T$ lineaarisesti riippumattomiksi.

b) Kuitenkaan ei sanota, että nuo kolme vektoria virittävät ratkaisujen \mathbf{x} joukon. Syynä on, että ratkaisujen \mathbf{x} joukko ei ole \mathbb{R}^5 :n aliavaruus. Osoita, että ratkaisujen \mathbf{x} joukko ei ole \mathbb{R}^5 :n aliavaruus.

3 a) Laske kaikki ominaisarvot matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

b) Laske ja esitä kuhunkin ominaisarvoon liittyvät kaikki ominaisvektorit.

c) Totea kuhunkin ominaisarvoon liittyvän ominaisavaruuden kanta ja dimensio.

4. Oletetaan, että $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ovat $n \times n$ -matriisin Z ominaisarvot ja $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ ovat niihin liittyviä ominaisvektoreita, jotka ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällöin on

$$[Z\mathbf{y}_1, Z\mathbf{y}_2, \dots, Z\mathbf{y}_n] = [\lambda_1\mathbf{y}_1, \lambda_2\mathbf{y}_2, \dots, \lambda_n\mathbf{y}_n]$$

a) Onko yllä olevan yhtälön vasen puoli sama kuin ZY vai YZ , kun Y on matriisi $Y = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$ (ja olettaen, että $ZY \neq YZ$)?

b) Onko yllä olevan yhtälön oikea puoli sama kuin LY vai YL , kun L on matriisi $L = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (olettaen, että $LY \neq YL$)?

c) Mitkä seuraavista neljästä yhtälöstä ovat tosia a- ja b-kohtien vastauksesi perusteella:

$$ZY = LY, \quad YZ = LY, \quad ZY = YL, \quad YZ = YL ?$$

d) Kumpi matriiseista Y ja Z voidaan oletetun nojalla päätellä kääntyviksi, jos kumpikaan, vaiko molemmat?

e) Ratkaise c-kohdassa todeksi ilmoittamistasi yhtälöistä Z (jos se on mahdollista d-kohdan vastauksesi perusteella).

f) Ratkaise c-kohdassa todeksi ilmoittamistasi yhtälöistä L (jos se on mahdollista d-kohdan vastauksesi perusteella).